

THÉORIE DE L'HEURE ARABE

PAR

M. LE PROF. G. ARVANITAKI.

Plusieurs millions d'hommes emploient l'heure arabe. Il est vrai que cette manière de compter le temps tend peu à peu à disparaître en ce qui concerne les relations publiques et la vie extérieure; mais il est à prévoir, par son caractère même religieux, qu'elle restera longtemps encore, comme cela arrive chez les chrétiens pour l'année lunaire, qui fixe la Pâque.

Je me propose dans cette étude d'établir la théorie de l'heure arabe, et je donnerai l'exposé de quelques solutions pratiques que j'ai imaginées relatives à cette question si importante pour mes concitoyens musulmans.

I. — PARTICULARITÉS DE L'HEURE ARABE.

Les musulmans comptent *douze* heures lorsque le soleil se couche, ce qui fait que l'heure arabe de midi est mobile. On en comprend que les expressions a. m. et p. m. ou heure du matin et heure du soir ne sont plus applicables à la manière arabe. Il n'y a que des «heures de jour» et des «heures de nuit».

On sait que chez les Européens il y a toujours un méridien, dont 180° d'un pôle à l'autre ont une heure donnée à un moment donné, et que l'heure de ses 180 autres degrés en diffère de 12 heures. Ces mêmes lieux ont la longueur du même jour différente, le soleil ne se couchant pas en même temps sur toute la longueur d'un même méridien.

Il en résulte que :

1° *Quoique ces lieux de même longitude aient en même temps midi, ils n'ont pas la même heure arabe;*

2° *Que l'heure arabe d'un point donné diffère de celle de tous les points qui sont ou sur le même parallèle ou sur le même méridien.*

Nous en concluons qu'il n'y a pas deux lieux qui ont, pendant toute l'année, la même heure arabe. Car, prenons un point quelconque sur la surface de notre globe au moment où le soleil se couche à son horizon. Les points de même longitude, mais qui sont situés plus au nord, ont le jour plus court et ils ont eu déjà 12 heures; ceux qui sont plus au sud, pas encore. De même, ceux qui sont à l'est ont la même latitude que le point choisi, mais ils ont déjà vu le soleil se coucher, tandis que ceux qui se trouvent à l'ouest doivent attendre encore un peu. Il s'ensuit qu'il y a au NO et au SE des lieux ayant 12 heures en même temps que notre point.

Comme à un moment donné tous les points dont les horizons passent par le centre solaire ont du coucher et leurs zéniths sont distants de son centre de 90° , il en résulte que leur lieu géométrique est un grand cercle ayant pour pôle le centre solaire.

Soit A un des points de ce lieu géométrique. Après quelques jours l'amplitude du soleil couchant sera différente; ce seront d'autres horizons qui auront leurs intersections entre eux et avec celui du point A au centre solaire; et comme le soleil a deux fois par an la même déclinaison, c'est-à-dire la même amplitude⁽¹⁾ pour chaque horizon, il s'ensuit que c'est deux fois seulement par an que le même lieu géométrique a 12 heures en même temps.

Puisque l'équateur coupe en deux tous les horizons, le lieu de même coucher sera aux équinoxes le méridien du point A; ce qui montre que le lieu géométrique dont nous avons parlé se meut autour du point A dans le sens NO-N, SE-S et N-NO, S-SE.

II. — RELATIONS DE L'HEURE ARABE D'UN LIEU AVEC CELLE D'UN AUTRE LIEU.

De ce qui précède on voit que le problème «trouver le lieu géométrique des points ayant 12 heures en même temps qu'un lieu donné» se réduit à «trouver l'amplitude α du coucher pour un lieu donné (λ et l donnés) et un jour

⁽¹⁾ L'amplitude d'un astre est l'arc de l'horizon compris entre le méridien et le parallèle de cet astre. On l'appelait aussi ortive.

donné (δ connu), ou bien « déterminer les coordonnées équatoriales du pôle de ce lieu » (fig. 1).

La formule

$$\sin \alpha = \frac{\sin \delta}{\cos \lambda}$$

donne l'amplitude, laquelle, comptée sur l'horizon entre le parallèle de l'astre et l'équateur, est de même signe que δ .

En la discutant, on voit que δ , qui varie continuellement, est le même pour les lieux ayant en même temps 12 heures et que $\cos \lambda$ est toujours positif puisqu'il y a toujours $0^\circ \leq \pm \lambda \leq 90^\circ$.

Remarquons que pour chaque lieu de tels points, il y en a quatre qui ont même latitude et des signes contraires deux à deux et que $+\delta$ doit être consi-

déré négatif pour l'hémisphère austral. Donc, d'après la formule, des points A_1, A_2 (fig. 2), les λ sont de signes contraires; or, la durée du jour pour A_1 est égale à la durée de la nuit du point A_2 , mais les nuits commencent en même temps pour le jour donné (fig. 3). Pour A_1, A_3 , qui sont sur le même méridien, le jour du premier a la même durée que la nuit du second, mais le coucher de l'un est le lever de l'autre. Ce n'est que pour les couples A_1, A_4 et A_3, A_2 que les jours sont égaux et se succèdent de manière que le midi de A_1 et

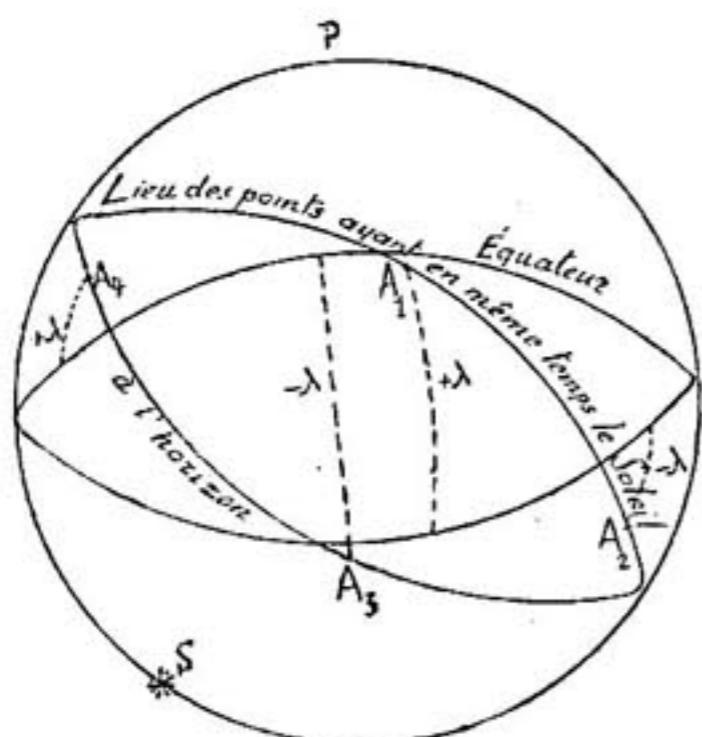


Fig. 2.

A_2 soit respectivement minuit de A_3, A_4 .

Il n'y a donc pas deux points sur la surface du globe qui puissent avoir pendant 24 heures leurs montres d'accord si elles sont réglées sur le temps local arabe.

EXEMPLE. — *Quel est le lieu des points qui ont 12 heures en même temps que le Caire le 20 août?*

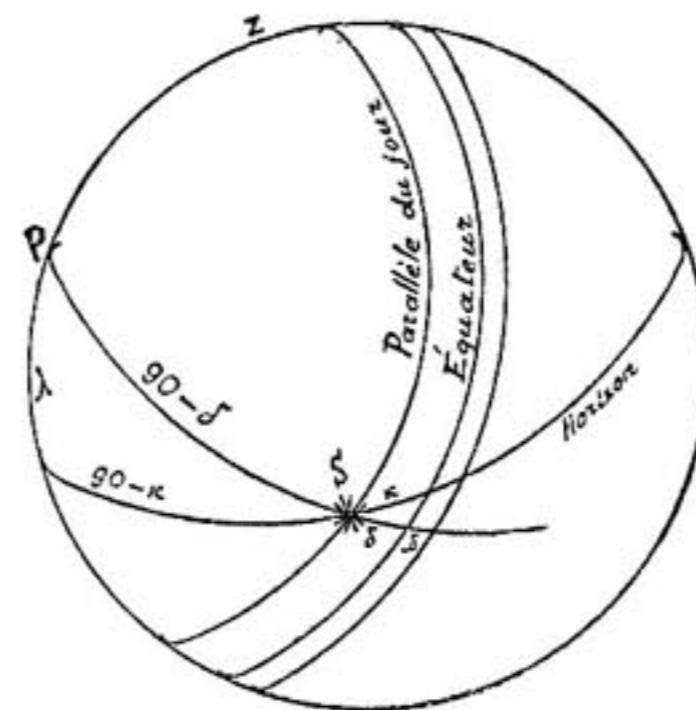


Fig. 1.

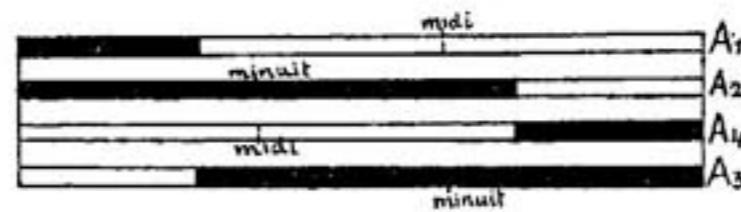


Fig. 3.

On a⁽¹⁾

$$\begin{aligned} + \delta &= 12^\circ 39', \lambda = 30^\circ 2' 4'' \\ \log \sin \delta &= \overline{1, 34043} \\ - \log \cos \delta &= \overline{1, 93738} \\ \log \sin \alpha &= \overline{1, 40305} \\ \alpha &= 14^\circ 38' 10'' \end{aligned}$$

Nous traçons sur un globe terrestre et avec un compas sphérique un grand cercle avec pôle le Caire et nous marquons sur lui, à partir de l'équateur, un arc égal à $14^\circ 38' 10''$. Ensuite, avec ce point comme pôle, nous traçons un nouveau grand cercle, qui doit passer par le Caire et qui sera le lieu géométrique cherché.

On peut encore procéder autrement :

L'heure arabe de midi étant égale à l'heure européenne du coucher retranchée de 12 heures, si on multiplie celle-ci à raison de 15° par unité d'heure, on a l'angle horaire du soleil couchant au jour donné. Celui-ci, augmenté algébriquement de la longitude du point donné (pour le Caire $l = 31^\circ 15' 26''$ E Greenwich), donne avec $\pm \delta$ (dans l'exemple proposé ci-dessus $+ 12^\circ 39'$) les coordonnées géographiques du pôle du lieu géométrique cherché.

Remarquons que le méridien de ce pôle partage le lieu trouvé en deux demi-circonférences, dont celle qui contient A 1 voit le coucher et l'autre le lever du soleil.

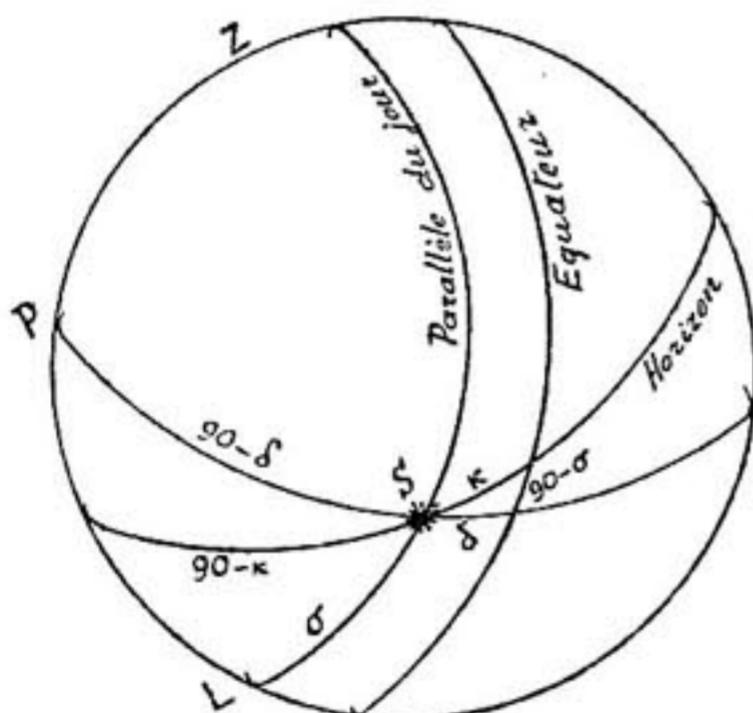


Fig. 4.

III. — L'ANGLE σ .

Comme l'origine de l'heure arabe est l'intersection occidentale du parallèle du jour de l'astre avec l'horizon du point, il importe de chercher la valeur de l'arc de ce parallèle situé au-dessous de l'horizon. C'est la partie du parallèle parcouru par le soleil pendant la nuit. Nous désignons par σ la moitié de cet arc.

Il peut être exprimé en fonction de δ et λ . En effet, dans la figure 4, où $SL = \sigma$

⁽¹⁾ On trouve la déclinaison du soleil dans la *Connaissance des Temps*, l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* pour chaque année. Dans les *Tables Logarithmiques* de Lalande on trouve la déclinaison pour une année moyenne entre deux bissextiles.

on a deux triangles rectangles, dont l'un a pour hypoténuse $90 - \delta$ et pour côtés verticaux λ et $90 - \kappa$, et l'autre κ pour hypoténuse et δ , $90 - \sigma$ pour côtés verticaux. Le premier donne

$$\sin \kappa = \frac{\sin \delta}{\cos \lambda}$$

le second

$$\cos \kappa = \cos \delta \sin \sigma.$$

La première peut s'écrire

$$1 - \sin^2 \kappa = 1 - \frac{\sin^2 \delta}{\cos^2 \lambda}, \quad \cos^2 \kappa = \frac{\cos^2 \lambda - \sin^2 \delta}{\cos^2 \lambda}$$

ce qui, appliqué à la seconde, donne

$$\cos \delta \sin \sigma = \sqrt{\frac{\cos^2 \lambda - \sin^2 \delta}{\cos^2 \lambda}}$$

$$\cos^2 \delta \sin^2 \sigma = \frac{\cos^2 \lambda - \sin^2 \delta}{\cos^2 \lambda}, \quad \sin^2 \sigma = \frac{\cos^2 \lambda - \sin^2 \delta}{\cos^2 \lambda \cos^2 \delta}, \quad 1 - \sin^2 \sigma = 1 - \frac{\cos^2 \lambda - \sin^2 \delta}{\cos^2 \lambda \cos^2 \delta}$$

$$\cos^2 \sigma = \frac{\cos^2 \lambda \cos^2 \delta - \cos^2 \lambda + \sin^2 \delta}{\cos^2 \lambda \cos^2 \delta}, \quad \cos^2 \sigma = \frac{\cos^2 \lambda (\cos^2 \delta - 1) + \sin^2 \delta}{\cos^2 \lambda \cos^2 \delta} = \frac{-\cos^2 \lambda \sin^2 \delta + \sin^2 \delta}{\cos^2 \lambda \cos^2 \delta}$$

$$\cos^2 \sigma = \frac{\sin^2 \delta (1 - \cos^2 \lambda)}{\cos^2 \lambda \cos^2 \delta} = \frac{\sin^2 \delta \sin^2 \lambda}{\cos^2 \delta \cos^2 \lambda}$$

$$\cos \sigma = \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \lambda.$$

Pour $-\delta$ les tables logarithmiques donneraient l'angle supplémentaire de σ .

IV. — QUELQUES PROBLÈMES.

1. Trouver l'heure arabe à midi vrai, pour un point donné, ainsi que l'heure du lever du soleil.

On voit par la figure 5 qu'il suffit de retrancher de 12 heures l'angle horaire H exprimé en temps. Toutefois le résultat doit être diminué de 4^m 23^s. Cette correction est due à ce que le 12 heure arabe marque l'instant où le disque solaire disparaît totalement de l'horizon et non pas lorsque celui-ci passe par le centre solaire. Il faut donc compter le temps nécessaire au demi-diamètre

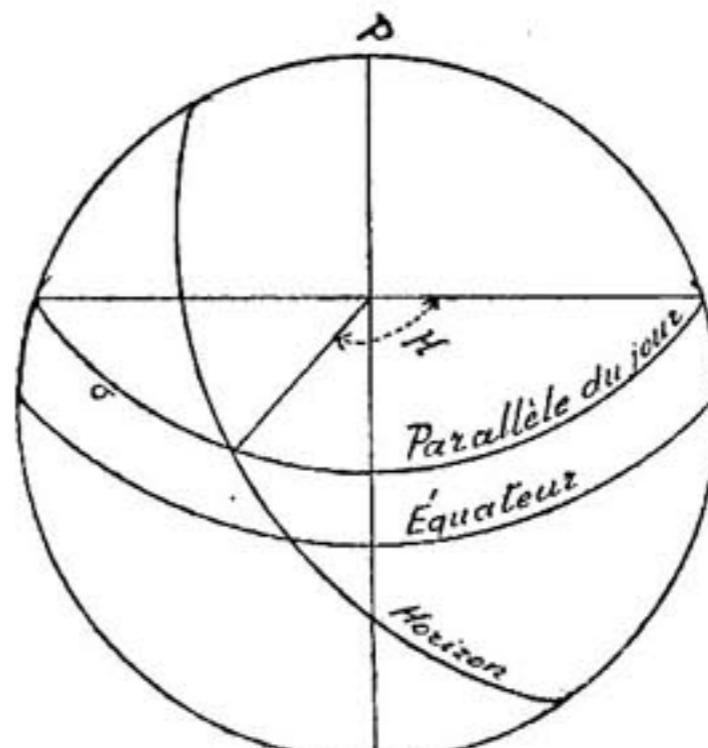


Fig. 5.

solaire ($32' 4''$ en moyenne) pour disparaître. De même la réfraction atmosphérique, qui fait augmenter la hauteur des astres, prend son maximum à l'horizon ($33' 48''$ en moyenne). Le total de ces deux arcs ($1^\circ 5' 52''$ en moyenne) est parcouru par le mouvement diurne en $4^m 23^s$.

L'heure du midi sera donc

$$T_{\text{midi}} = 12 - \left(\frac{180 - \sigma}{15} + 4^m 23^s \right)$$

et celle du lever

$$T_{\text{lever}} = 12 - 2 \left(\frac{180 - \sigma}{15} + 4^m 23^s \right).$$

EXEMPLE. — Trouver l'heure à midi vrai et celle au lever du soleil au Caire le 20 août.

On a

$\delta = +12^\circ 39'$, $\lambda = 30^\circ 2' 4''$ et on calcule σ :

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg} \delta &= \overline{1, 35111} \\ \log \operatorname{tg} \lambda &= \overline{1, 76204} \\ \log \cos \sigma &= \overline{1, 11315} \\ \sigma &= 82^\circ 32' 4'' \\ 180 - \sigma &= 97^\circ 27' 56'' \\ \frac{180 - \sigma}{15} &= 6^h 29^m 52^s \\ 12 - n &= 5^h 30^m 8^s \\ \text{Correction} &= -4^m 23^s \\ T_m &= 5^h 25^m 49^s \\ T_l &= 10^h 51^m 30^s \end{aligned}$$

Pour $-\delta$ il ne faut pas retrancher de 180° la valeur de σ donnée par les tables. Ainsi on trouverait pour heure du midi vrai au Caire : $4^h 57^m 31^s$ pour le solstice d'été, et $6^h 53^m 43^s$ pour celui d'hiver.

Trouver l'heure d'un point en temps local arabe, connaissant celle d'un autre point au même instant.

Soit (fig. 6) Z, Z' les zéniths des deux lieux, O, O' leurs horizons, E l'équateur, P le pôle nord, S le soleil au moment donné H . La différence $(12 - H) 15$ donne l'arc SM , chemin qui reste à parcourir au soleil jusqu'à son coucher à

l'horizon O , tandis que NS est le même chemin pour l'horizon O' . Il s'agit donc d'exprimer MN en temps.

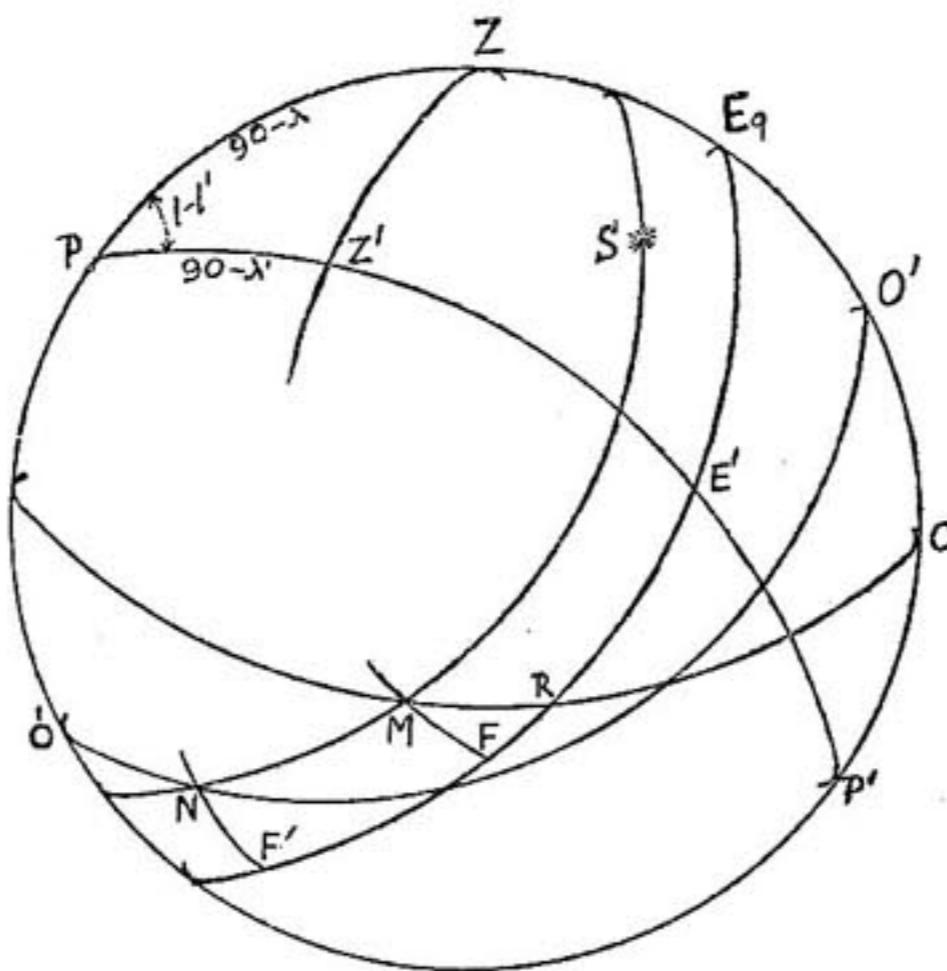


Fig. 6.

$MN = FF'$, F, F' étant les points où les cercles de déclinaison du soleil couchant successivement aux horizons mentionnés rencontrent l'équateur. On a :

$$RF = 90 - \sigma$$

$$EF = ER + RF = 180 - \sigma$$

$$E'F' = 180 - \sigma'$$

$$EE' = l - l' \text{ différence des deux longitudes.}$$

$$FF' = EF' - EF = EE' + E'F' - EF = l - l' + 180 - \sigma' - 180 + \sigma$$

$$FF' = l - l' + \sigma - \sigma'.$$

Connaissant δ , λ et λ' nous calculons la différence $\sigma - \sigma'$. Ayant obtenu FF' nous l'ajoutons à l'arc SM ; l'heure demandée sera

$$12 - \frac{SM + FF'}{15}$$

ou

$$12 - \frac{(12 - H) 15 [(l - l') + (\sigma - \sigma')]}{15}$$

ou

$$\frac{15 H - [(l - l') + (\sigma - \sigma')]}{15}$$

Cette formule contenant σ , σ' qui dépendent du δ , montre qu'il faut donner non seulement l'heure mais encore le jour de l'année; on en conclut que la déclinaison variant, pour H constant, l'heure correspondante du lieu Z' varie aussi; ainsi à 9 heures au Caire le 1^{er} janvier et le 1^{er} mars il ne correspond pas la même heure arabe à Fez.

S'il s'agissait de l'heure européenne la question serait plus simple, la différence de l'heure européenne de deux lieux étant égale à la différence algébrique de leurs longitudes exprimées en temps.

EXEMPLE. — *Quelle heure est-il à Fez à midi précis au Caire le 20 août?*

Le 20 août au Caire il est 5^h 25^m 45^s à midi vrai. On a :

$$\begin{aligned}
 l &= 31^\circ 15' 37'' \text{ E (Greenwich)} & \lambda &= 30^\circ 2' 4'' \text{ N} \\
 l' &= 5^\circ 1' 19'' \text{ W} & " &= 34^\circ 6' 3'' " \\
 l - l' &= 36^\circ 16' 46'' \\
 \sigma - \sigma' &= 1^\circ 15' 37'' \\
 (l - l') + (\sigma - \sigma') &= 37^\circ 32' 23'' \\
 15 \text{ H} &= 83^\circ 37' 52'' \\
 15 \text{ H} - [(l - l') + (\sigma - \sigma')] &= 46^\circ 5' 29'' \text{ ou en temps } 3^h 4^m 22^s.
 \end{aligned}$$

V. — HOROSCOPE UNIVERSEL.

Soit O le centre du globe (fig. 7), P le pôle, EE' l'équateur, et A, B, C trois parallèles de latitude $\lambda, \lambda', \lambda''$.

Supposons le soleil dans la direction de OS passant au méridien EPE' au jour du solstice d'été. Alors SOE' sera égal à la valeur maximum et positive de δ , soit à $23^\circ 28'$, et DFG le terminateur dont le plan est vertical au rayon vecteur OS . A la simple inspection de la figure on voit que la partie des parallèles située à droite du terminateur représente la longueur du

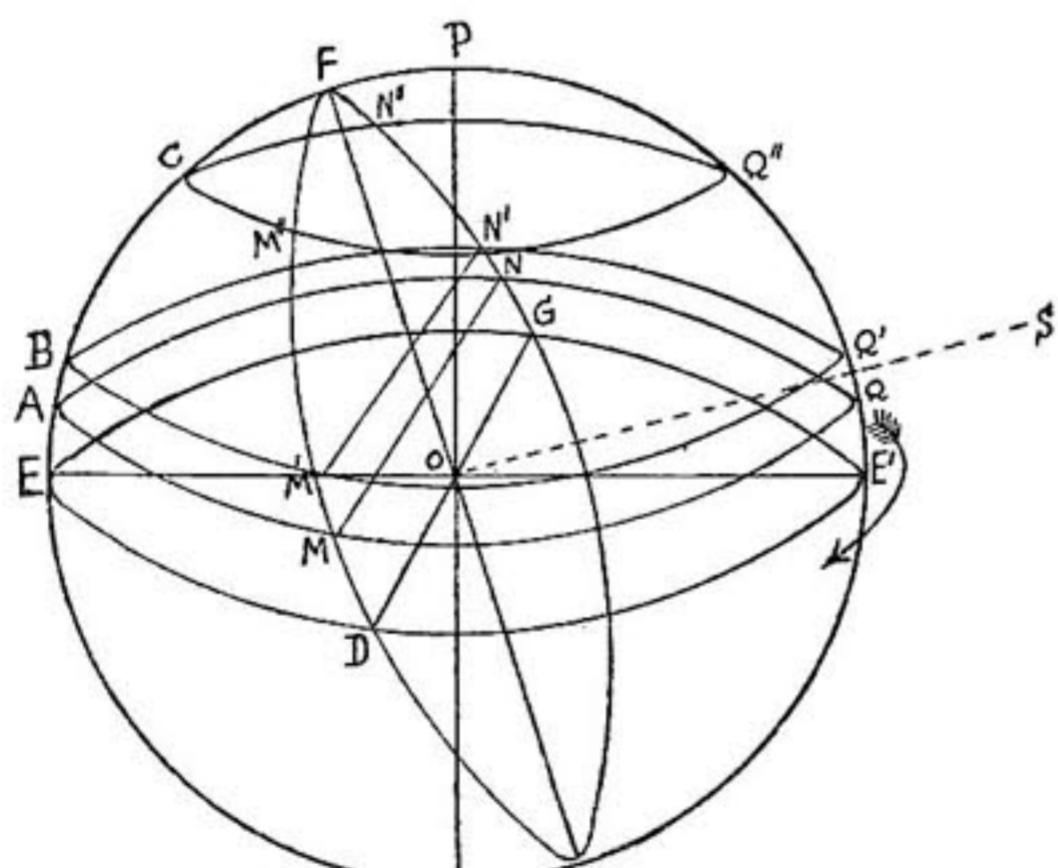


Fig. 7.

jour, et celle qui lui est à gauche représente celle de la nuit. Si la Terre

tourne d'après la flèche, les points M, M', M'' marquent les couchers et les points N, N', N'' les leviers du soleil, tandis que les points Q, Q', Q'' marquent les midis vrais des points des parallèles A, B, C . On en comprend facilement que si les lieux M, M', M'' ont 12 heures arabe en même temps, ils n'ont pas midi à la même heure arabe, puisqu'ils ne se trouvent pas sur le même méridien, et que l'heure de midi vrai pour chacun d'eux est d'autant plus avancée que l'arc éclairé de leur parallèle est plus petit, c'est-à-dire que sa latitude est plus petite.

Projetons (fig. 8) parallèles et terminateur sur le plan de l'équateur. Les premiers seront projetés en cercles de rayon $\cos\lambda$ et le second en ellipses dont le grand axe sera le diamètre DG de l'équateur et le petit axe égal à $\cos(90-\delta)$ ou à $\sin\delta$. Pour $\delta=0$, c'est-à-dire aux équinoxes, cette ellipse se réduit au diamètre DG . C'est donc le petit axe seulement qui varie avec δ ; et comme chaque valeur de δ correspond à deux dates de l'année, nous pouvons coter le petit axe de ces deux dates.

Si la circonference de rayon 1 qui est l'équateur est divisée en 24 heures de manière que le diamètre DG passe par les deux 12 heures, du coucher et du lever équatoriaux, celui du midi et du minuit passera par les 6 heures. Les points M, M', M'' ont leurs projections en m, m', m'' . Si nous faisons tourner la circonference équatoriale dans le sens de la flèche, de manière que OD passe par m' , toutes les heures se déplaceront du même arc et on aura pour le parallèle les heures du lever et du midi.

Notre instrument (fig. 9) se compose d'un disque qui porte tracées lesdites projections des latitudes de 5 à 5° marqués convenablement, et celles du terminateur avec les doubles dates; un anneau qui encercle le disque peut tourner dans le même plan et porte les 24 heures en arabe. Le disque porte une aiguille qui doit être portée d'abord à marquer 12 heures arabe à gauche, tout

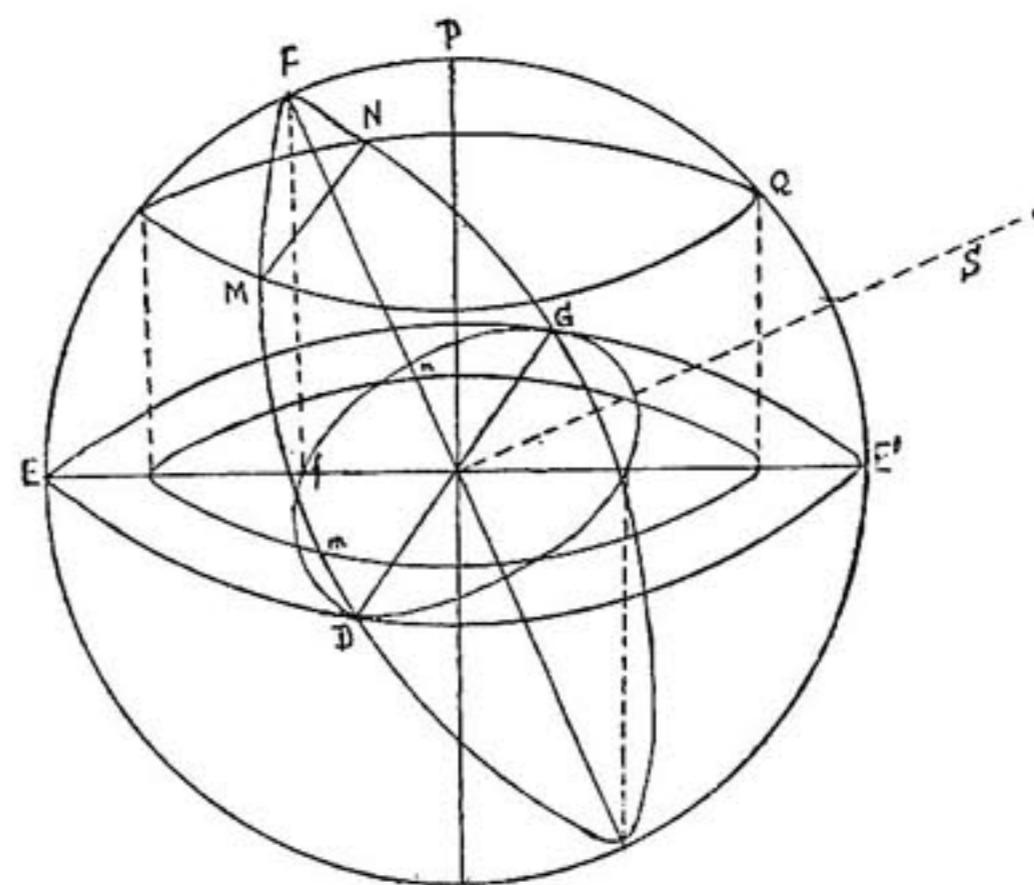


Fig. 8.

en passant par l'intersection du parallèle du lieu et de l'ellipse de la date donnée. Ensuite on porte l'aiguille sur $O E'$ qui est la méridienne pour avoir

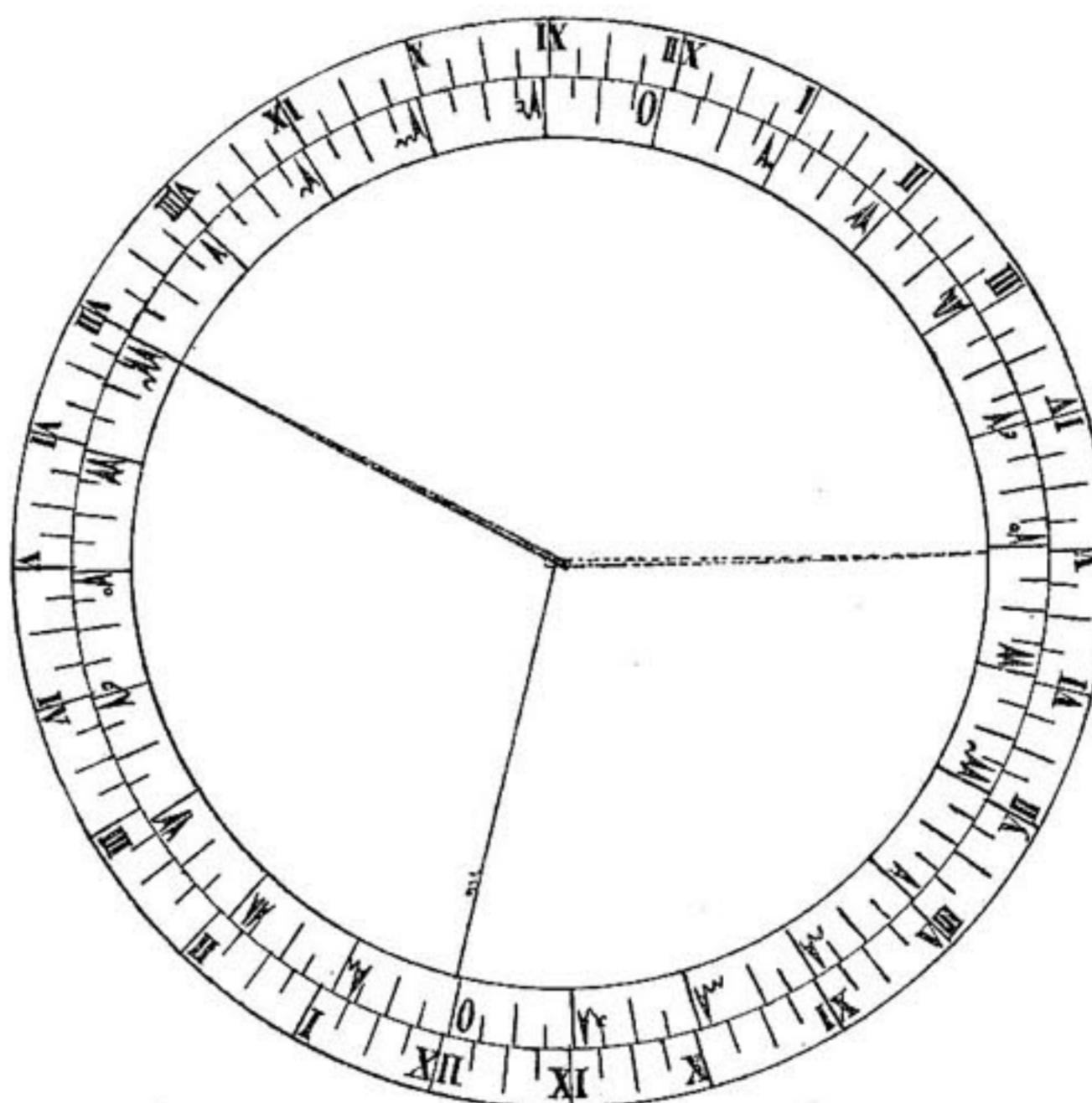


Fig. 9.

l'heure arabe du midi vrai et enfin on amène l'aiguille à l'autre intersection des mêmes courbes pour obtenir l'heure arabe du lever.

Un second anneau qui entoure le premier est divisé en 24 heures en caractères européens. En conservant l'heure XII sur le prolongement de la méridienne on a la correspondance des heures arabes et européennes pendant les 24 heures de ce jour et pour cette latitude. Si on veut avoir l'heure européenne en temps moyen et légal, il faut déplacer XII heures d'après l'équation du temps augmentée de la correction légale.

Notre horoscope résout aussi le problème de l'heure arabe de différentes villes au même instant.

VI. — SUR LES HEURES DES CINQ PRIÈRES DES MUSULMANS.

Dans le Coran il est fait très souvent mention de la prière, mais nulle part il n'y est indiqué l'heure précise pour chacune des prières canoniques. Ce sont les premiers grands exégètes qui, basés sur l'exemple donné par le Prophète, ont considéré, très justement, sa pratique comme un éclaircissement officiel de la question, ou comme l'explication pratique des indications vagues du texte sacré. C'est ce qui constitue la « tradition ».

Ces prières, au nombre de cinq, sont :

1° La *prière de l'Aube* (el-Subh), qui commence au moment où, à l'horizon oriental, se dessine en ligne blanche et assez bien définie l'aurore qui commence. Peu à peu l'aube s'élargit, devient plus diffuse et gagne en hauteur. C'est l'aurore. Pendant ce temps le fidèle doit adresser sa première prière. Cet espace de temps expire un peu avant le lever du soleil, lorsque le bord supérieur de son disque va être tangent à l'horizon qui le cache.

On admet généralement que l'aube, appelée en arabe el-Fagr, a lieu lorsque le centre solaire se trouve à 19° , ou 20° selon d'autres, au-dessous de l'horizon. Le Survey Department accepte $19^{\circ} 30'$.

$$-\cos t = \lg \lambda \lg \delta \dots \dots (1)$$

le second

$$-\sin h = \sin \lambda \sin \delta + \cos \lambda \cos \delta \cos(t+e)$$

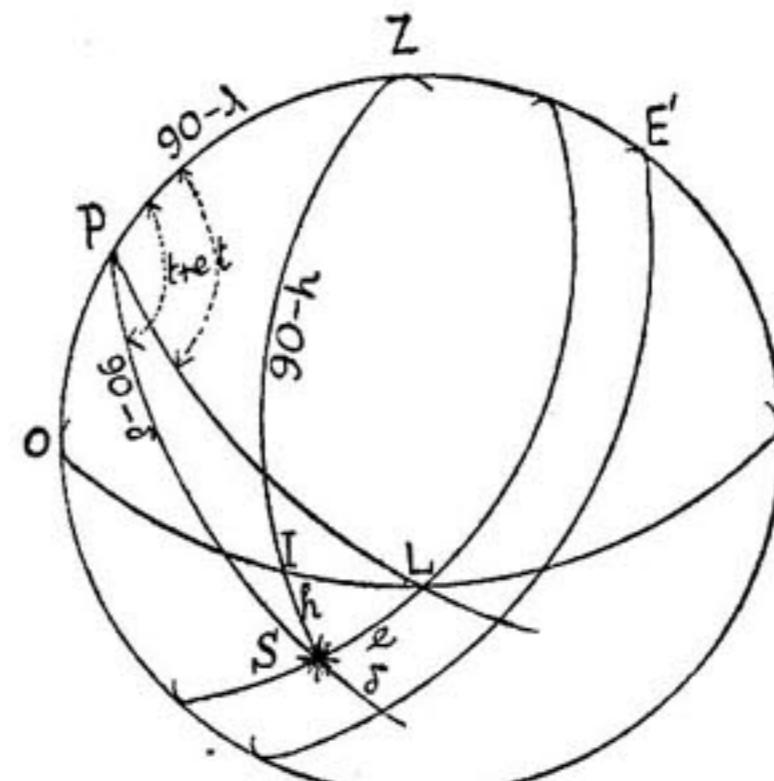


Fig. 10.

d'où

$$-\cos(t+e) = \frac{\sin h + \sin \lambda \sin \delta}{\cos \lambda \cos \delta} \dots (2)$$

où $h = 19^\circ 30'$ pour el-Subh et $17^\circ 33'$ pour el-Isha. On voit que e dépend de la latitude, or autant λ augmente autant h diminue.

EXEMPLE. — *A quelle heure commence el-Subh à la Mecque le 10 juin?*

On a $\lambda = 21^\circ 22' 30''$ N. $\delta = +23^\circ$.

Or, midi est à $5^h 17^m 22^s$ et lever à $10^h 34^m 44^s$.

Pour déterminer l'heure d'el-Subh la formule (2) donne

$$\begin{aligned} \log \sin 19^\circ 30' &= \overline{1,52350} \\ \sin \pi &= 0,3338 \\ \log \sin \delta &= \overline{1,59188} \\ \log \sin \lambda &= \overline{1,56166} \\ \hline & \overline{1,15354} = \overline{0,1424} \\ & \overline{1,4762} \\ \log I &= \overline{1,67779} \\ \log \cos \delta &= \overline{1,96403} \\ \log \cos \lambda &= \overline{1,96905} \\ \hline \log II &= \overline{1,93308} \\ \log \cos(t+e) &= \overline{1,74471} \end{aligned}$$

Comme le cosinus est négatif, il correspond à $180 - (t+e)$, or

$$t+e = 120^\circ 45' 5''$$

La formule (1) donne :

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg} \delta &= \overline{1,62785} \\ \log \operatorname{tg} \lambda &= \overline{1,59262} \\ \log \cos t &= \overline{1,22047} \end{aligned}$$

Le $\cos t$ étant négatif, on prend $180 - t$ et on a :

$$\begin{aligned} t &= \underline{99^\circ 33' 48''} \\ e^\circ &= 21^\circ 11' 17'' \\ e^h &= 1^h 24^m 45'. \end{aligned}$$

Or l'heure d'el-Subh est à $9^h 9^m 59^s$.

Aux jours des équinoxes $\delta = 0$, les formules (1) et (2) deviennent réciproquement

$$-\cos t = 0 \quad \text{d'où } t = 90^\circ \quad \text{et } \sin e = \frac{\sin h}{\cos \lambda}.$$

Dans l'exemple donné, e aux équinoxes serait $21^{\circ} 0' 22''$, soit $1^{\text{h}} 24^{\text{m}} 1^{\text{s}}$.

Pour $-\delta$ on prend encore pour valeur de $t+e$ son supplément mais t est plus petit que 90° . Ainsi el-Subh, dans l'exemple donné, sera au solstice d'hiver :

$$\begin{aligned}
 -\sin 19^{\circ} 30' &= 0, 3338 \\
 +\sin \lambda \sin \delta &= \underline{0, 1424} \\
 l &= -0, 1914 \\
 \log l &= \overline{1, 28194} \\
 \log II &= \overline{1, 93308} \\
 t+e &= 180 - 77^{\circ} 6' 47'' = 102^{\circ} 53' 13'' \\
 t &= \underline{\underline{80 \ 26 \ 12}} \\
 e &= \overline{22^{\circ} 27' 1''} \\
 e^h &= \underline{\underline{1^{\text{h}} 29^{\text{m}} 52^{\text{s}}}}
 \end{aligned}$$

Pour le Caire on aurait el-Subh $\left\{ \begin{array}{ll} \text{au solstice d'été} & \text{à } 1^{\text{h}} 50^{\text{m}} 31^{\text{s}} \\ \text{à l'équinoxe} & \text{"} 1 30 42 \\ \text{au solstice d'hiver} & \text{"} 1 37 8 \end{array} \right\}$ avant le lever du soleil.

2° La *prière du Midi* (el-Zuhr) est le temps accordé au fidèle pour l'accomplissement de cette seconde prière. Il commence à partir de l'instant où le centre solaire passe au méridien, c'est-à-dire à midi vrai, et il expire un peu avant l'Asr, qui marque le commencement de la troisième prière. Midi vrai est marqué par l'ombre d'un indice vertical sur une surface horizontale lorsqu'il atteint sa longueur minimum dans la journée.

3° La *troisième prière de l'après-midi* (el-Asr) commence depuis l'instant où l'ombre d'une tige verticalement plantée est égale à celle du midi au même jour plus une fois, d'après les Chaféïtes, ou deux fois, d'après les Hanafites, la hauteur de la tige. On en déduit que l'Asr des Hanafites suit celui des Chaféïtes. Le temps pendant lequel le musulman peut faire sa troisième prière expire un peu avant le coucher du soleil.

On en distingue un premier (el-asr awal) et un second (el-asr tani) suivant que l'horizon est tangent au bord inférieur ou au bord supérieur du disque (fig. 11), ce qui marque la disparition complète de l'astre du jour.

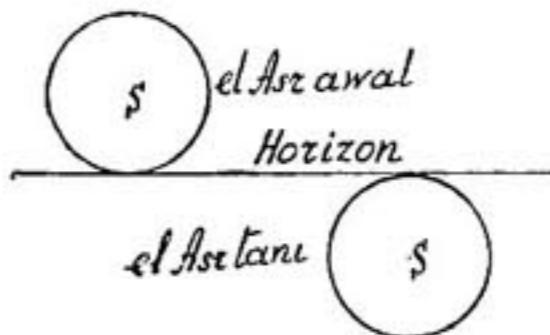


Fig. 11.

L'ombre à midi (fig. 12) : $AC = h \operatorname{ctg} [90 - (\lambda - \delta)] = h \operatorname{tg}(\lambda - \delta)$ devient à l'heure de l'Asr : $AB = h [1 \text{ ou } 2 + \operatorname{tg}(\lambda - \delta)] \dots \dots \text{ (a)}$.

Les hauteurs respectives de l'astre seront données par les formules

$$\operatorname{tg} v = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}(\lambda - \delta)}, \quad \operatorname{tg} v' = \frac{1}{2 + \operatorname{tg}(\lambda - \delta)}$$

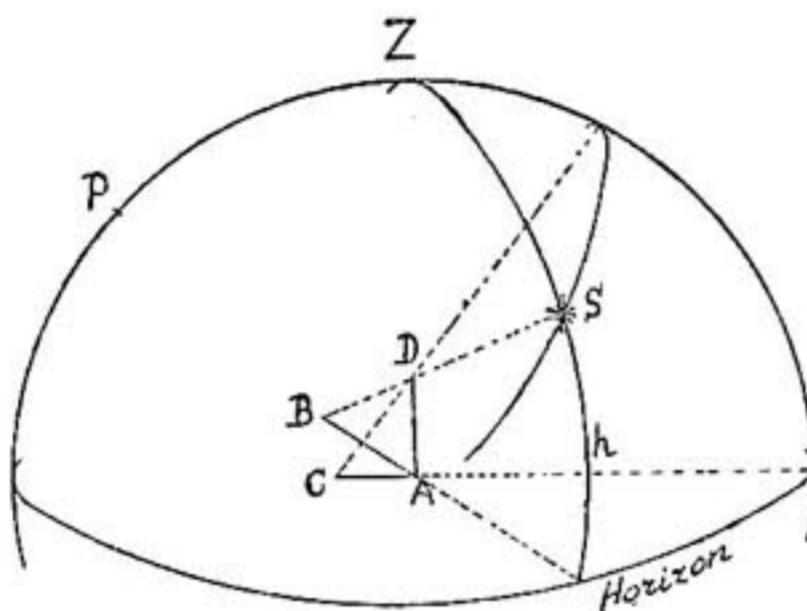


Fig. 12.

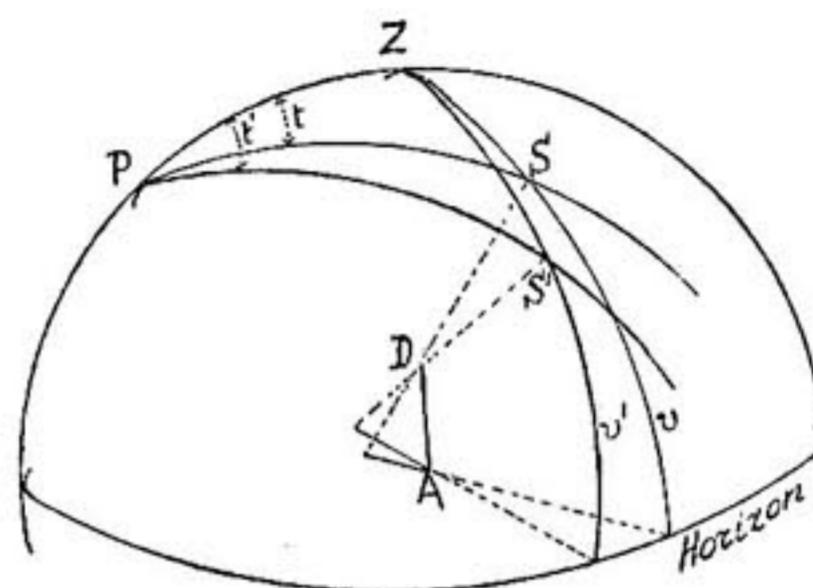


Fig. 13.

La différence des $t' - t$ (fig. 13) des temps sera donnée par les formules

$$\cos t' = \frac{\sin v' - \sin \lambda \sin \delta}{\cos \lambda \cos \delta}, \quad \cos t = \frac{\sin v - \sin \lambda \sin \delta}{\cos \lambda \cos \delta} \dots \dots \text{ (b)}$$

Dans les formules (a) et (b) pour $\delta = 0$, c'est-à-dire aux équinoxes, $\operatorname{tg}(\lambda - \delta)$ et le produit $\sin \lambda \sin \delta$ deviennent respectivement $\operatorname{tg} \lambda$ et 0.

EXEMPLE. — Quelle est à la Mecque la différence des heures des deux Asrs d'après les deux rites, aux deux solstices et aux équinoxes?

Nous avons

$$\begin{array}{r} \lambda = 21^\circ 22' 30'' \\ \delta = 23^\circ 27' 8'' \\ \lambda - \delta = -2^\circ 4' 38'' \end{array}$$

CALCUL DE v	CALCUL DE v'
$\log \operatorname{tg}(\lambda - \delta) = \bar{2},55927$	
$\operatorname{tg}(\lambda - \delta) = -0,03625$	$-0,03625$
$+ 1,$	$+ 2,$
$\text{Dénom.} = \bar{0},96375$	$\bar{1},96375$
$\log \text{ " } = \bar{1},98397$	$0,29308$
$\operatorname{colog} \text{ " } = \bar{0},01603$	$\bar{1},70692$
$v = 46^\circ 3' 30''$	$v' = 26^\circ 59' 13''$

CALCUL DE t

$$\log \sin \nu = \overline{1,85736}$$

$$\sin \nu = 0,7201$$

$$\log \sin \lambda = \overline{1,56166}$$

$$\log \sin \delta = \overline{1,59987}$$

$$\log \text{II} = \overline{1,16153}$$

$$\text{II} = 0,1451$$

$$\log \cos \lambda = \overline{1,96905}$$

$$\log \cos \delta = \overline{1,96253}$$

$$\log \text{III} = \overline{1,92158}$$

$$\sin \nu = 0,7201$$

$$-\text{II} = \overline{0,1451}$$

$$1 - \text{II} = \overline{0,5750}$$

$$\log \nu = \overline{1,75967}$$

$$-\log \text{III} = \overline{1,92158}$$

$$\log \cos t = \overline{1,83809}$$

$$t = 43^\circ 32' 5''$$

$$t' - t = 24^\circ 45' 43'' = 1^h 39^m 3^s.$$

CALCUL DE t'

$$\overline{1,65685}$$

$$0,4538$$

$$0,4538$$

$$\overline{0,1451}$$

$$\overline{0,3087}$$

$$\overline{1,48954}$$

$$\overline{1,92158}$$

$$\overline{1,56796}$$

$$t' = 68^\circ 17' 48''$$

Pour le solstice d'hiver la différence $\lambda - \delta$ devient $\lambda + \delta = 44^\circ 49' 38''$. On trouve $\nu = 26^\circ 38'$, $\nu' = 18^\circ 28' 10''$ et $t' - t = 28^m 2^s$.

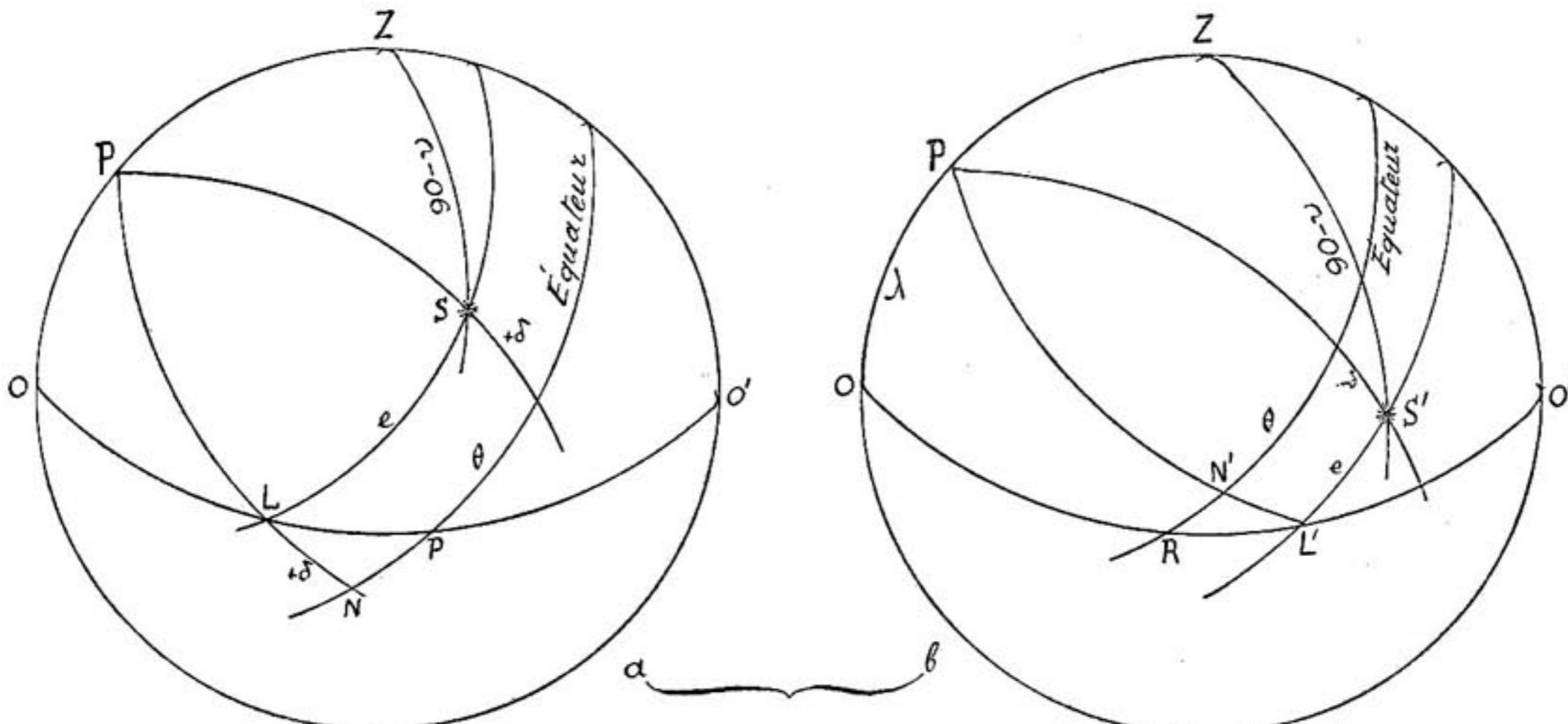


Fig. 14.

Aux équinoxes où $\delta = 0$ on a $\nu = 35^\circ 42' 17''$, $\nu' = 22^\circ 41' 35''$ et $t' - t = 57^m 22^s$.
Pour déterminer l'heure de l'Asr pour un lieu il faut exprimer e (fig. 14)

en fonction de v , λ , δ . Alors $12 - \frac{e^\circ}{15}$ sera l'heure cherchée. Le triangle LRN donne (fig. 14a) :

$$\cos(90 - \kappa) = \cos \delta \cos(e - \theta)$$

d'où

$$\cos(e - \theta) = \frac{\sin \kappa}{\cos \delta} \dots \dots \dots (1).$$

Si δ est négatif, comme au triangle RL'N' (fig. 14b) alors $\kappa > 90^\circ$ et on a $\theta - e$. Les triangles PZS pour $+\delta$, et PZS' pour $-\delta$ donnent :

$$\sin \theta = \frac{\sin v + \sin \lambda \sin \delta}{\cos \lambda \cos \delta} \dots \dots \dots (2).$$

et les triangles POL, POL' donnent :

$$\cos(90 - \delta) = \cos \lambda \cos \kappa, \quad \cos \kappa = \pm \frac{\sin \delta}{\cos \lambda}, \quad \sin^2 \kappa = \frac{\cos^2 \lambda - \sin^2 \delta}{\cos^2 \lambda}$$

qui, appliquée à (1), donne

$$\cos^2(e - \theta) = \frac{\cos^2 \lambda - \sin^2 \delta}{\cos^2 \lambda \cos^2 \delta} \dots \dots \dots (3).$$

Les équations (2) et (3) avec la formule $\operatorname{tg} v = \frac{1}{1 \text{ ou } 2 + \operatorname{tg}(\lambda - \delta)}$ donnent e .

L'heure de la troisième prière varie donc pour un lieu donné avec les valeurs de e pour $\delta = \pm 23^\circ 27' 8''$.

EXEMPLE. — Trouver l'heure d'*el-Asr* pour le Caire aux deux solstices et aux équinoxes.

L'application des formules (1), (2), (3) donne :

POUR LE SOLSTICE D'ÉTÉ :

$$\begin{aligned}
 \lambda &= 30^\circ 2' 4'' & 2 \log \cos \lambda &= \overline{1,87476} & & \\
 \delta &= 23^\circ 27' & \cos^2 \lambda &= & I &= 0,7495 \\
 \lambda - \delta &= \overline{6^\circ 35' 4''} & 2 \log \sin \delta &= \overline{1,19966} & & \\
 \log \operatorname{tg}(\lambda - \delta) &= \overline{1,06298} & \sin^2 \delta &= & II &= 0,1584 \\
 \operatorname{tg}(\lambda - \delta) &= 0,1156 & & & I - II &= \overline{0,5911} \\
 \overline{1} & & & & \log(I - II) &= \overline{1,77166} \\
 II &= 1,1156 & & & & \\
 \log II &= 0,04751 & 2 \log \cos \lambda &= \overline{1,87476} & & \\
 \operatorname{colg} II &= \overline{1,95249} & 2 \log \cos \delta &= \overline{1,92512} & & = \overline{1,79988} \\
 v &= 41^\circ 52' 21'' & \log III &= & & \\
 \log \sin v &= \overline{1,82444} & & & 2 \log \cos(e - \theta) &= \overline{1,97178} \\
 I &= \sin v = 0,6675 & & & \log \cos(e - \theta) &= \overline{1,98589} \\
 & & & & e - \theta &= 14^\circ 31' 40'' \\
 \end{aligned}$$

POUR LE SOLSTICE D'ÉTÉ :

$$\begin{aligned}
 \log \sin \lambda &= \overline{1,69942} \\
 \log \sin \delta &= \overline{1,59983} \\
 \log \text{II} &= \overline{1,29925} \\
 I &= 0,6675 \\
 \text{II} &= \overline{-0,1992} \\
 I - \text{II} &= 0,4683 \\
 \log(I - \text{II}) &= \overline{1,67052} \\
 \log \cos \lambda &= \overline{1,93738} \\
 \log \cos \delta &= \overline{1,96256} \\
 \log \text{III} &= \overline{1,89994} \\
 \log(I - \text{II}) &= \overline{1,67052} \\
 \log \text{III} &= \overline{1,89994} \\
 \log \sin \theta &= \overline{1,77058} \\
 \theta &= 36^\circ 7' 50"
 \end{aligned}$$

POUR LE SOLSTICE D'HIVER :

$$\begin{aligned}
 \lambda &= 30^\circ 2' 4'' \\
 \delta &= \overline{23^\circ 27'} \\
 (\lambda + \delta) &= 53^\circ 29' 4'' \\
 \log \text{tg} \, \pi &= 0,13055 \\
 \text{tg} \, \pi &= \overline{1,3507} \\
 \text{II} &= \overline{2,3507} \\
 \log \pi &= 0,37109 \\
 \text{colog} \, \pi &= \overline{1,62896} \\
 v &= 23^\circ 3' 10'' \\
 \log \sin v &= \overline{1,59282} \\
 \sin v &= 0,3916 \\
 \text{II} &= \overline{0,1992} \\
 I - \text{II} &= 0,5908 \\
 \log \pi &= \overline{1,77144} \\
 - \log \text{III} &= \overline{1,89973} \\
 \log \sin \theta &= \overline{1,87171} \\
 \theta &= 48^\circ 5' 38'' \\
 -(\theta - e) &= \overline{14^\circ 31' 40''} \\
 e^\circ &= 33^\circ 33' 58'' \\
 e^h &= 2^h 15^m 16^s \\
 12 - e &= 9^h 45^m 44^s \\
 \text{correction} &= \overline{-4^m 23^s}
 \end{aligned}$$

$9^h 41^m 21^s$ Asr pour le Caire au solstice d'hiver.

$$\begin{aligned}
 \theta &= 36^\circ 7' 50'' \\
 e^\circ &= 50^\circ 39' 30'' \\
 e^h &= 3^h 22^m 38^s \\
 12 - e &= 8^h 37^m 22' \\
 \text{correction} &= \overline{-4^m 23^s}
 \end{aligned}$$

Asr pour le Caire au solstice d'été = $8^h 32^m 59^s$

POUR LES ÉQUINOXES :

$$\begin{aligned}
 \text{pour } \delta = 0 \\
 \log \text{tg} \lambda &= \overline{1,76204} \\
 \text{tg} \lambda &= 0,57815 \\
 &\quad \overline{1} \\
 &\quad \overline{1,57815} \\
 \log(1 + \text{tg} \lambda) &= 0,19815 \\
 \text{colog} \, \pi &= \overline{1,80185} \\
 v &= 32^\circ 21' 40'' \\
 \log \sin v &= \overline{1,72857} \\
 \log \cos \lambda &= \overline{1,93738} \\
 e^\circ &= \theta^\circ = 38^\circ 5' 17'' \\
 e^h &= 2^h 32^m 27^s \\
 12 - e &= 9^h 27^m 33^s \\
 \text{correction} &= \overline{-4^m 23^s}
 \end{aligned}$$

Asr pour le Caire aux équinoxes = $9^h 23^m 10^s$

Il doit y avoir quelque malentendu ou fausse interprétation. C'est à nos savants arabisants de nous en éclairer. Déterminer les heures de prière d'après la direction ou la longueur de l'ombre des objets, c'est parfaitement naturel surtout pour cette zone de la terre; mais donner comme mesure au peuple une unité si difficilement calculable, c'est impossible.

L'ombre à midi est variable, la hauteur de l'objet est constante. Or il est plus logique de penser qu'on a donné comme unité de mesure un multiple de cette dernière. Aujourd'hui le Gouvernement égyptien publie un almanach, mode peu indiqué pour l'usage du peuple, qui s'effraie à l'aspect des nombres. Aux premiers siècles de l'islamisme et en Arabie la circulation et l'usage des guides imprimés ne devaient pas être en grande vogue.

4° *La quatrième prière du soir* (el-Maghrib) commence au deuxième coucher et finit quelques instants avant la disparition du crépuscule rouge.

5° *La cinquième prière de nuit* (el-Isha) est la dernière et commence à la disparition totale du crépuscule rouge jusqu'à l'aube. On accepte généralement et d'après l'expérience que le soleil se trouve alors à $17^{\circ} 33'$ au-dessous de l'horizon. Mais comme pour l'heure d'el-Subh il ne faut pas compter sur cet arc de hauteur négative mais sur la partie correspondante du parallèle du jour. Pour calculer e on procède comme pour l'heure d'el-Subh. Ainsi on trouverait qu'aux équinoxes l'heure d'el-Isha commence à la Mecque à $1^{\text{h}} 15^{\text{m}} 22^{\text{s}}$.

La différence entre les $19^{\circ} 33'$ et $17^{\circ} 33'$ des deux crépuscules du matin et du soir m'a été expliquée par Idris bey Ragheb par le fait que l'œil est plus sensible le matin après le repos de la nuit, que le soir après la fatigue de la lumière du jour et surtout aux climats tropiques et avec la manière de vivre des Orientaux.

En général, le calcul des heures où commence chacune des cinq prières canoniques est facile; seulement il est à remarquer qu'une doctrine étant universelle, le rituel doit l'être aussi. Or les indications empruntées à la nature qui marquent les heures de prière deviennent impossibles sous certaines latitudes. Ainsi le soleil s'abaissant à Paris au solstice d'été moins de 17° , les musulmans parisiens ne sont pas à même d'estimer où finit el-Isha et où commence el-Subh.

La même chose pour l'Asr, qui présente encore d'autres particularités. Or il est évident que pour rester dans l'esprit du commandement il faut chercher comment se partage l'espace des 24 heures à la Mecque pour les heures des cinq prières canoniques et partager sur cette base le jour et la nuit pour toute la surface du globe, puisque la doctrine islamique l'a enveloppé comme une atmosphère.

Aux jours fériés il y a des prières exceptionnelles qui commencent dans la matinée lorsque le soleil s'est élevé au-dessus de 5° ou de 10° d'après les Hanafites.

VII. — CADRANS SOLAIRES ARABES.

CADRANS ÉQUATORIAUX.

Soit (fig. 15) h = la demi-longueur de l'indice coïncidant avec l'axe du monde. Par l'extrémité supérieure de cet indice passe le plan de l'équateur et celui de l'horizon, tandis que verticalement sur son milieu passe le plan du cadran. Il est évident que les parallèles de déclinaison positive se projettent sur la face boréale du cadran et ceux dont la déclinaison est négative sur la face australe. Ces projections circulaires auront pour rayon : $h \operatorname{ctg} \delta$.

L'intersection de l'horizon qui passe par l'extrémité de l'indice avec le plan du cadran sera une ligne droite et parallèle à la ligne équatoriale. La distance de cette ligne au pied de l'indice, qui est aussi le centre des circonférences, sera : $h \operatorname{tg} \lambda$. L'intersection du plan du méridien avec celui du cadran sera une ligne droite passant par le pied de l'indice et verticale à la ligne équatoriale.

Comme les Arabes commencent le jour depuis l'instant où l'horizon occidental est tangent au bord supérieur du disque solaire, et par conséquent ils comptent 11 heures quand il reste encore 15° du parallèle au soleil à parcourir, il en résulte que l'extrémité de l'ombre au moment du coucher touche l'intersection du plan de l'horizon avec celui du cadran au point où elle rencontre la trace du parallèle du jour, et qu'une heure avant, cette extrémité était au-dessous de l'horizon sur la circonférence de cette trace du parallèle, mais 15° plus bas qu'à 12 heures.

Nous chercherons le lieu géométrique de l'extrémité de l'ombre pour une heure donnée.

Soient (fig. 15 et 16) O = le pied de l'indice, OA = la partie de la méridienne

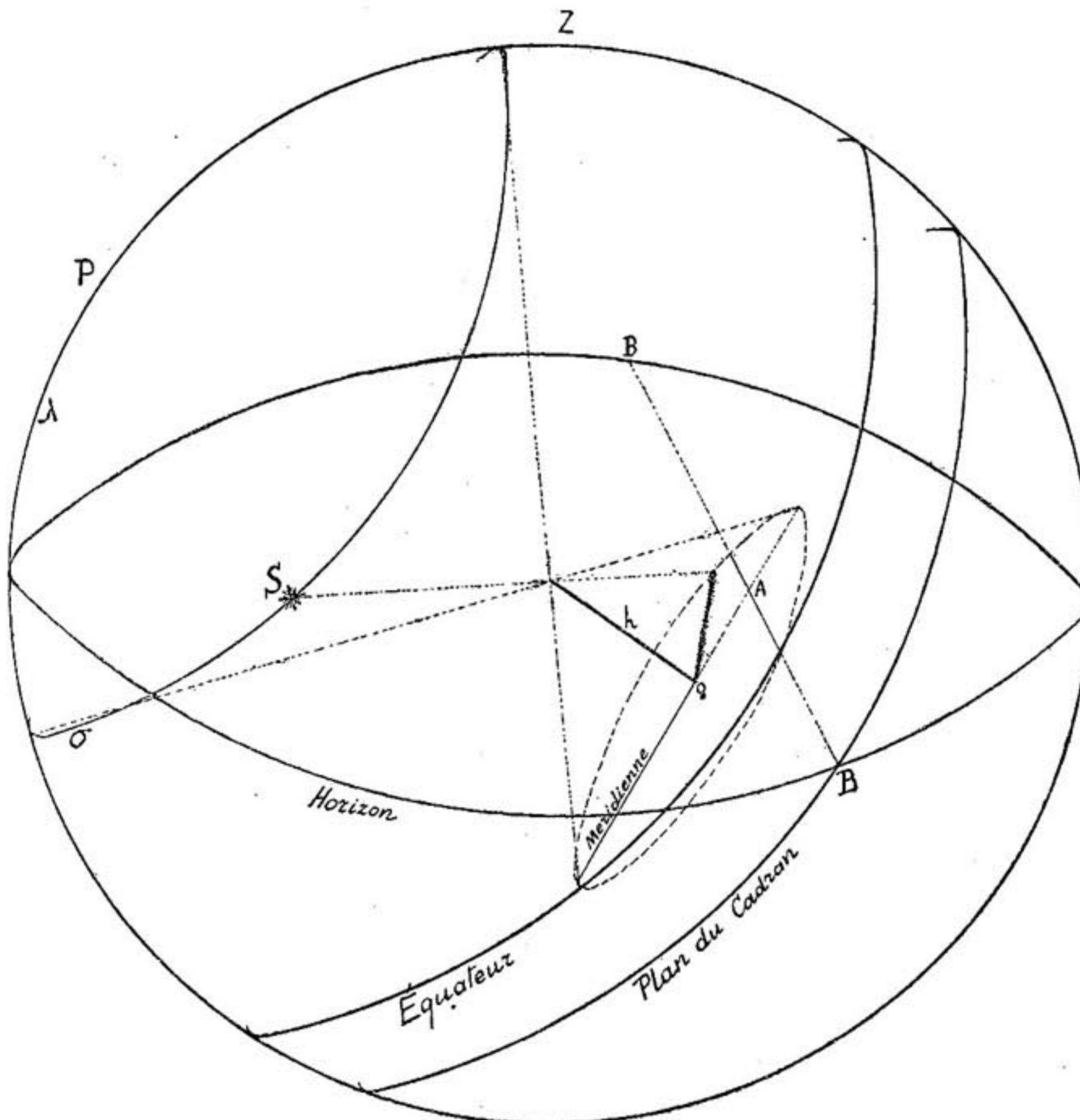


Fig. 15.

comprise entre le pied O et la ligne horaire de 12 heures BB' , et OE , OD , OB les ombres de l'indice en longueur et en direction aux couchers du soleil aux jours des inclinaisons δ , δ' , δ'' , qui sont en même temps les rayons des circonférences correspondantes; σ , σ' , σ'' = les angles que forment ces rayons avec la méridienne, angles qui correspondent aux moitiés occidentales des

arcs des parallèles toujours sous l'horizon; enfin OF, OG, OH = les ombres à 11 heures. Les arcs EF, OG, BH sont égaux.

Prenons pour axes des coordonnées cartésiennes les lignes : projection de l'équatoriale (y) et méridienne (x). Les coordonnées du point F seront données par le système des équations :

$$(x + h \lg \lambda)^2 + y^2 = h^2 \operatorname{ctg}^2 \delta$$

$$y = (x + h \lg \lambda) \operatorname{tg} (\sigma + e)$$

Fig. 16.

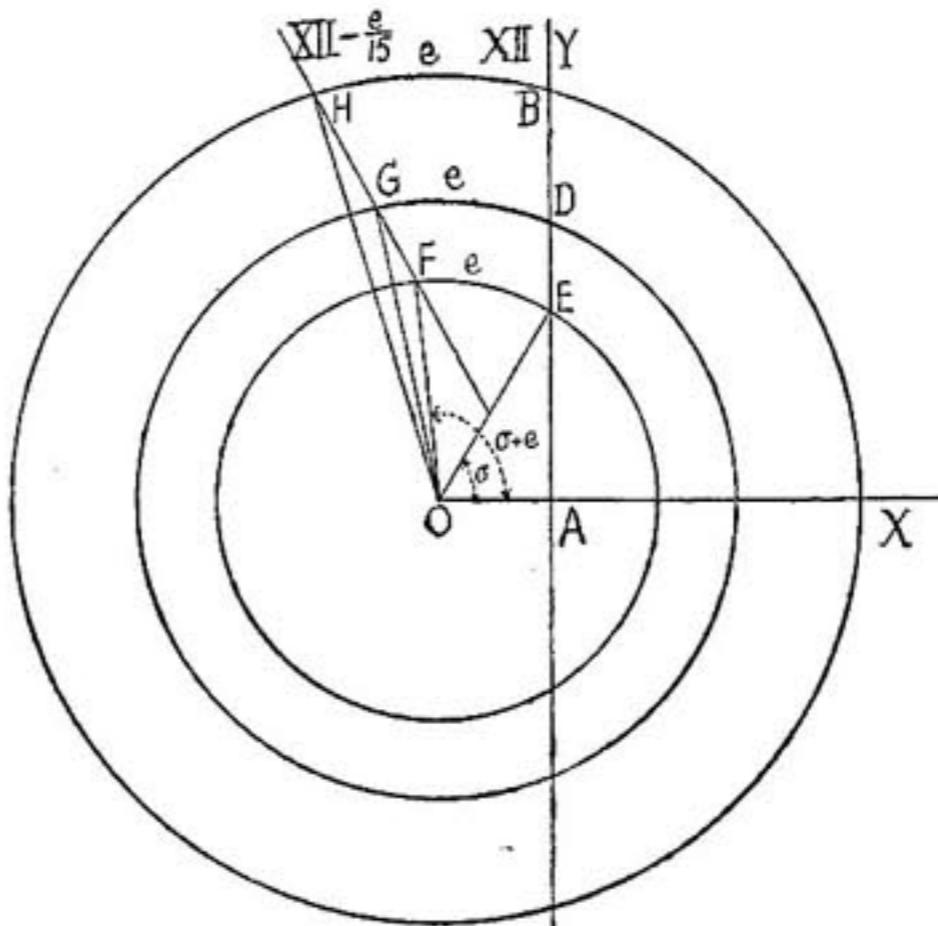


Fig. 16.

$$\begin{aligned}
 y^2 &= h^2 \operatorname{ctg}^2 \delta - (x + h \operatorname{tg} \lambda)^2 & (x + h \operatorname{tg} \lambda)^2 &= h^2 \operatorname{ctg}^2 \delta - y^2 \\
 y^2 &= \operatorname{tg}^2 (\sigma + e) (x + h \operatorname{tg} \lambda)^2 & (x + h \operatorname{tg} \lambda)^2 &= \frac{y^2}{\operatorname{tg}^2 (\sigma + e)} \\
 h^2 \operatorname{ctg}^2 \delta - (x + h \operatorname{tg} \lambda)^2 &= \operatorname{tg}^2 (\sigma + e) (x + h \operatorname{tg} \lambda)^2 & h^2 \operatorname{ctg}^2 \delta &= \frac{y^2}{\operatorname{tg}^2 (\sigma + e)} + y^2 \\
 h^2 \operatorname{ctg}^2 \delta &= (x + h \operatorname{tg} \lambda)^2 [1 + \operatorname{tg}^2 (\sigma + e)] & h^2 \operatorname{ctg}^2 \delta &= y^2 \left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 (\sigma + e)} + 1 \right) \\
 h^2 \operatorname{ctg}^2 \delta &= \frac{(x + h \operatorname{tg} \lambda)^2}{\cos^2 (\sigma + e)} \\
 h \operatorname{ctg} \delta \cos (\sigma + e) &= x + h \operatorname{tg} \lambda \\
 x &= h [\operatorname{ctg} \delta \cos (\sigma + e) - \operatorname{tg} \lambda] & y &= h \operatorname{ctg} \delta \sin (\sigma + e)
 \end{aligned}$$

La longueur AE est égale d'une part à $h \operatorname{ctg} \delta \sin \sigma$ et d'autre part à $h \operatorname{tg} \lambda \operatorname{tg} \sigma$, relations qui existent aussi pour les autres longueurs AD, AB, etc. Nous pouvons donc écrire la série des rapports suivants, constamment égaux à l'unité :

$$\frac{h \operatorname{tg} \lambda \operatorname{tg} \sigma}{h \operatorname{ctg} \delta \sin \sigma} = \frac{h \operatorname{tg} \lambda \operatorname{tg} \sigma'}{h \operatorname{ctg} \delta \sin \sigma'} = \dots$$

d'où

$$\operatorname{ctg} \delta' = \frac{\cos \sigma}{\cos \sigma'}, \operatorname{ctg} \delta.$$

Pour chercher maintenant le lieu géométrique des extrémités de l'ombre pour une heure donnée et pour toute l'année nous appliquerons la formule

$$(y - y') (x' - x'') = (x - x') (y' - y'')$$

qui montrera si les trois points F, G, H sont en ligne droite. Nous aurons successivement

$$\begin{aligned} & [h \operatorname{ctg} \delta \sin(\sigma + e) - h \operatorname{ctg} \delta' \sin(\sigma' + e)] \{ h [\operatorname{ctg} \delta' \cos(\sigma' + e) - \operatorname{tg} \lambda] - h [\operatorname{ctg} \delta'' \cos(\sigma'' + e) - \operatorname{tg} \lambda] \} = \\ & \{ h [\operatorname{ctg} \delta \cos(\sigma + e) - \operatorname{tg} \lambda] - h [\operatorname{ctg} \delta' \cos(\sigma' + e) - \operatorname{tg} \lambda] \} [h \operatorname{ctg} \delta' \sin(\sigma' + e) - h \operatorname{ctg} \delta'' \sin(\sigma'' + e)], \\ & \frac{\operatorname{ctg} \delta \sin(\sigma + e) - \operatorname{ctg} \delta' \sin(\sigma' + e)}{\operatorname{ctg} \delta' \sin(\sigma' + e) - \operatorname{ctg} \delta'' \sin(\sigma'' + e)} = \frac{[\operatorname{ctg} \delta \cos(\sigma + e) - \operatorname{tg} \lambda] - [\operatorname{ctg} \delta' \cos(\sigma' + e) - \operatorname{tg} \lambda]}{[\operatorname{ctg} \delta' \cos(\sigma' + e) - \operatorname{tg} \lambda] - [\operatorname{ctg} \delta'' \cos(\sigma'' + e) - \operatorname{tg} \lambda]}, \\ & " = \frac{\operatorname{ctg} \delta \cos(\sigma + e) - \operatorname{ctg} \delta' \cos(\sigma' + e)}{\operatorname{ctg} \delta' \cos(\sigma' + e) - \operatorname{ctg} \delta'' \cos(\sigma'' + e)}, \\ & \frac{\operatorname{ctg} \delta \sin(\sigma + e) - \operatorname{ctg} \delta' \sin(\sigma' + e)}{\operatorname{ctg} \delta \cos(\sigma + e) - \operatorname{ctg} \delta' \cos(\sigma' + e)} = \frac{\operatorname{ctg} \delta' \sin(\sigma' + e) - \operatorname{ctg} \delta'' \sin(\sigma'' + e)}{\operatorname{ctg} \delta' \cos(\sigma' + e) - \operatorname{ctg} \delta'' \cos(\sigma'' + e)}, \\ & \frac{\operatorname{ctg} \delta (\sin \sigma \cos e + \cos \sigma \sin e) - \operatorname{ctg} \delta' (\sin \sigma' \cos e + \cos \sigma' \sin e)}{\operatorname{ctg} \delta (\cos \sigma \cos e - \sin \sigma \sin e) - \operatorname{ctg} \delta' (\cos \sigma' \cos e - \sin \sigma' \sin e)} = \\ & = \frac{\operatorname{ctg} \delta' (\sin \sigma' \cos e + \cos \sigma' \sin e) - \operatorname{ctg} \delta'' (\sin \sigma'' \cos e + \cos \sigma'' \sin e)}{\operatorname{ctg} \delta' (\cos \sigma' \cos e - \sin \sigma' \sin e) - \operatorname{ctg} \delta'' (\cos \sigma'' \cos e - \sin \sigma'' \sin e)}, \\ & \frac{\operatorname{ctg} \delta (\sin \sigma \cos e + \cos \sigma \sin e) - \frac{\cos \sigma}{\cos \sigma'}}{\operatorname{ctg} \delta (\cos \sigma \cos e - \sin \sigma \sin e) - \frac{\cos \sigma'}{\cos \sigma}} \frac{\operatorname{ctg} \delta (\sin \sigma' \cos e + \cos \sigma' \sin e)}{\operatorname{ctg} \delta (\cos \sigma' \cos e - \sin \sigma' \sin e)} = \\ & = \frac{\operatorname{ctg} \delta' (\sin \sigma' \cos e + \cos \sigma' \sin e) - \frac{\cos \sigma}{\cos \sigma''} \operatorname{ctg} \delta' (\sin \sigma'' \cos e + \cos \sigma'' \sin e)}{\operatorname{ctg} \delta' (\cos \sigma' \cos e - \sin \sigma' \sin e) - \frac{\cos \sigma'}{\cos \sigma''} \operatorname{ctg} \delta' (\cos \sigma'' \cos e - \sin \sigma'' \sin e)} \\ & \frac{\cos e (\sin \sigma - \cos \sigma \operatorname{tg} \sigma')}{\sin e (\cos \sigma \operatorname{tg} \sigma' - \sin \sigma)} = \frac{\cos e (\sin \sigma' - \cos \sigma' \operatorname{tg} \sigma'')}{\sin e (\cos \sigma' \operatorname{tg} \sigma'' - \sin \sigma')} \end{aligned}$$

qui est une identité. Ayant ainsi montré que les trois points F, G, H sont en ligne droite, nous cherchons l'équation de ce lieu géométrique, qui est précisément la ligne horaire $12 \text{ h} - \frac{e''}{15}$. Nous prendrons ensuite de l'équation du lieu les segments des axes coupés par cette ligne horaire, ce qui indiquera le tracé pratique des lignes horaires en général. La formule que nous avons appliquée plus haut est l'équation de la ligne qui passe par deux points donnés. En reprenant la même formule nous avons :

$$\frac{y - h \operatorname{ctg} \delta \sin(\sigma + e)}{x - h [\operatorname{ctg} \delta \cos(\sigma + e) - \operatorname{tg} \lambda]} = \frac{h \operatorname{ctg} \delta \sin(\sigma + e) - h \operatorname{ctg} \delta' \sin(\sigma' + e)}{h [\operatorname{ctg} \delta \cos(\sigma + e) - \operatorname{tg} \lambda] - h [\operatorname{ctg} \delta' \cos(\sigma' + e) - \operatorname{tg} \lambda]}$$

et, d'après ce que nous venons de faire plus haut :

$$\begin{aligned} \frac{y - h \operatorname{ctg} \delta \sin(\sigma + e)}{x - h [\operatorname{ctg} \delta \cos(\sigma + e) - \operatorname{tg} \lambda]} &= -\operatorname{ctg} e \\ y &= -x \operatorname{ctg} e + h \operatorname{ctg} e [\operatorname{ctg} \delta \cos(\sigma + e) - \operatorname{tg} \lambda] + h \operatorname{ctg} \delta \sin(\sigma + e) \\ y &= -x \operatorname{ctg} e + h \operatorname{ctg} \delta \cos \sigma \operatorname{cose} \operatorname{ctg} e - h \operatorname{ctg} \delta \sin \sigma \sin e \operatorname{ctg} e - h \operatorname{ctg} e \operatorname{tg} \lambda \\ &\quad + h \operatorname{ctg} \delta \sin \sigma \operatorname{cose} + h \operatorname{ctg} \delta \cos \sigma \sin e \\ y &= -x \operatorname{ctg} e + \frac{\cos^2 e}{\sin e} - \operatorname{tg} \sigma \operatorname{cose} - \operatorname{ctg} e + \operatorname{tg} \sigma \operatorname{cose} + \sin e \end{aligned}$$

dans laquelle $h \operatorname{tg} \lambda = 1$ et par conséquence $h \operatorname{ctg} \delta = \sec \sigma$.

$$\begin{aligned} y &= -x \operatorname{ctg} e + \frac{\cos^2 e}{\sin e} + \sin e - \operatorname{ctg} e \\ y \sin e &= -x \operatorname{cose} + \cos^2 e + \sin^2 e - \cos e \\ y \sin e + x \operatorname{cose} &= 1 - \cos e \end{aligned}$$

et en lui donnant la forme générale $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$:

$$\frac{x}{1 - \cos e} + \frac{y}{\frac{1 - \cos e}{\sin e}} = 1.$$

Or le lieu sépare sur l'axe des x le segment $\frac{1 - \cos e}{\cos e}$ et sur celui des y le segment $\frac{1 - \cos e}{\sin e}$.

VIII. — CONSTRUCTION PRATIQUE DU CADRAN SOLAIRE ÉQUATORIAL ARABE.

Il faut remarquer tout d'abord qu'il doit y avoir une différence dans le tracé des deux faces :

1° Pour la face boréale (fig. 17), sur laquelle se projettent les parallèles des déclinaisons positives nous portons sur la méridienne du pied de l'indice vers le zénith une longueur égale à $h \operatorname{tg} \lambda$.

2° A l'extrémité de cette longueur nous portons une ligne verticale qui sera l'intersection du plan de l'horizon avec celui du cadran, en même temps que la ligne horaire du coucher.

3° Nous calculons la quantité $h \operatorname{ctg} \delta$ pour $\delta = 23^{\circ} 28'$ et avec cette longueur comme rayon nous traçons une circonférence

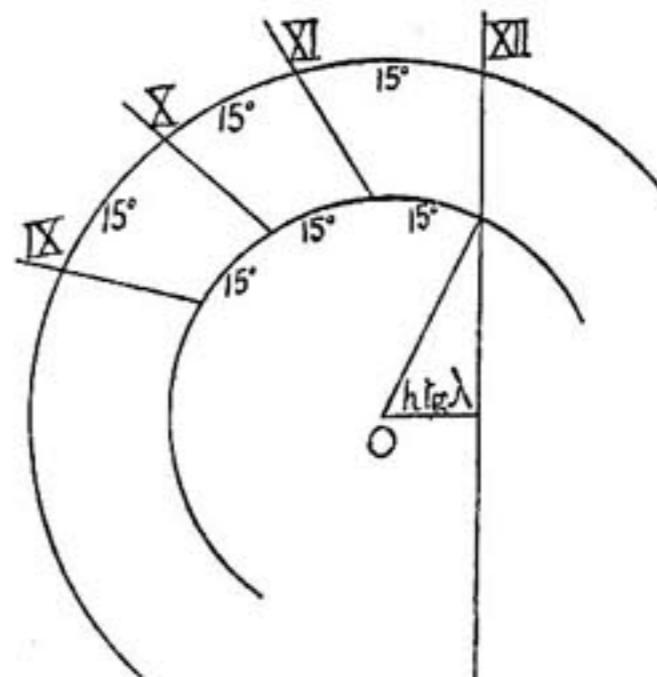


Fig. 17.

qui sera la projection du tropique du cancer (solstice d'été). Elle sera tangente à la ligne horaire de 12 heures si $\operatorname{ctg}\delta = \operatorname{tg}\lambda$, c'est-à-dire si $\delta + \lambda = 90^\circ$, ce qui arrive aux cercles polaires.

4° Nous partageons la partie de cette circonference, qui contient le pied de l'indice, en commençant par son intersection orientale avec la ligne horaire de 12 heures, en arcs de 15° pour les heures entières et de $7^\circ 30'$ pour les demi-heures.

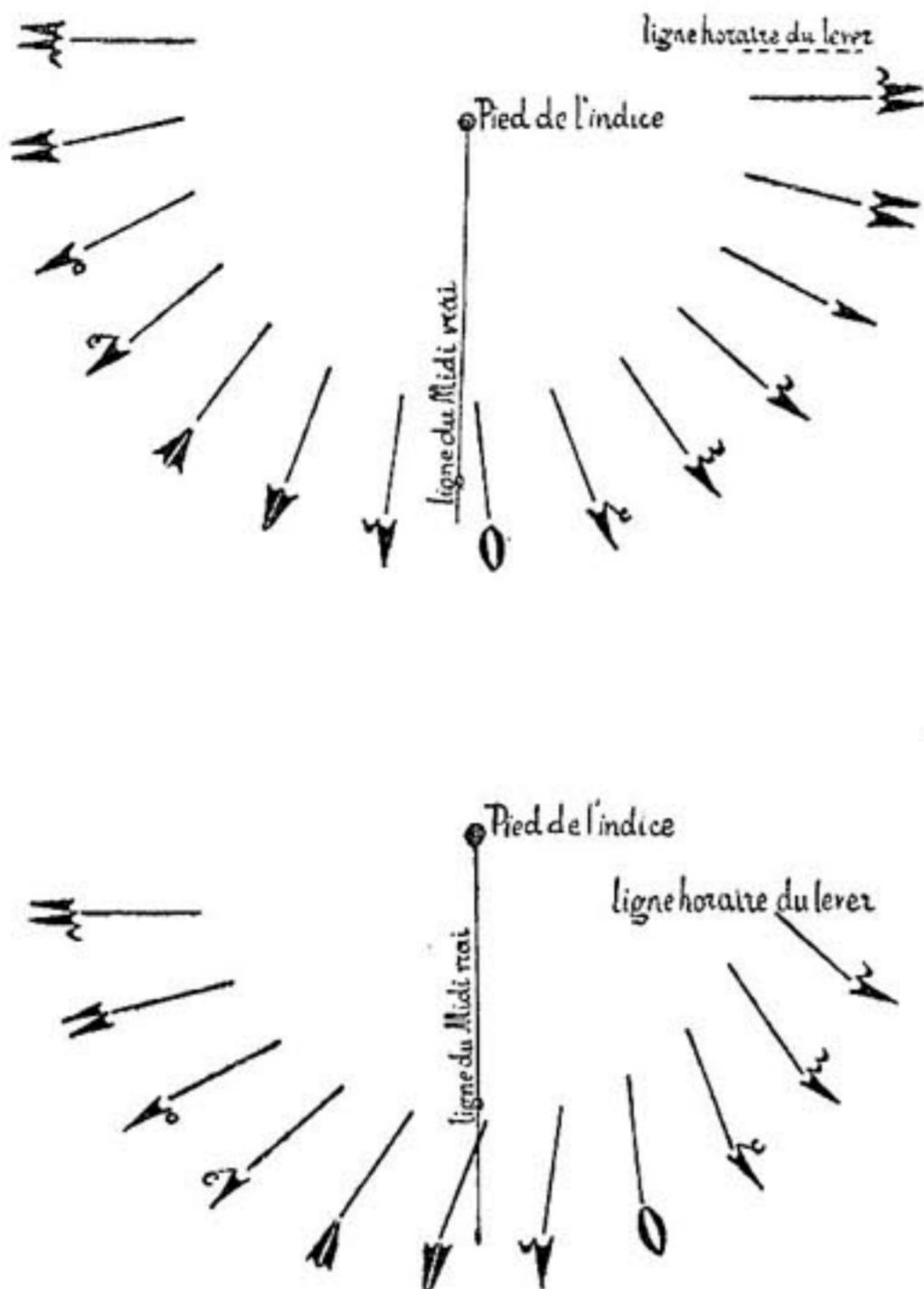


Fig. 18.

Note 3. Pour la face australe nous observons que la longueur $h \operatorname{tg}\lambda$ doit être portée du pied de l'indice vers le nadir.

La figure 18 représente les deux faces d'un cadran solaire équatorial arabe.

Pour l'installer sur une base fixe, on trace d'abord la méridienne sur une base par une des méthodes données par l'*Annuaire du bureau des longitudes* (étoile polaire, boussole, angles correspondants, etc.). On fait ensuite coïncider la méridienne tracée déjà sur la base du cadran avec celle de la base fixe.

5° Nous traçons une autre circonference de rayon plus grande que nous partageons de la même manière.

6° La ligne horaire de 12 heures joignant déjà les origines des premiers arcs des deux circonférences, nous en joignons les autres. Ces lignes seront les horaires cherchées.

Note 1. Il est superflu de prolonger les lignes horaires au dedans du cercle de rayon $h \operatorname{ctg} 23^\circ 28'$.

Note 2. Au lieu des opérations 4, 5, 6 nous pouvons calculer pour chaque heure les quantités

$$\frac{1 - \cos e}{\cos e} \text{ et } \frac{1 - \cos e}{\sin e}.$$

IX. — CADRAN SOLAIRE ÉQUATORIAL PORTATIF.

Nous sommes heureux de présenter au public islamique un cadran équatorial portatif donnant l'heure arabe en même temps que l'heure européenne. Il répond, en effet, à une nécessité de la pratique religieuse.

Comme la ligne horaire de 12 heures se rapproche ou s'éloigne du pied de

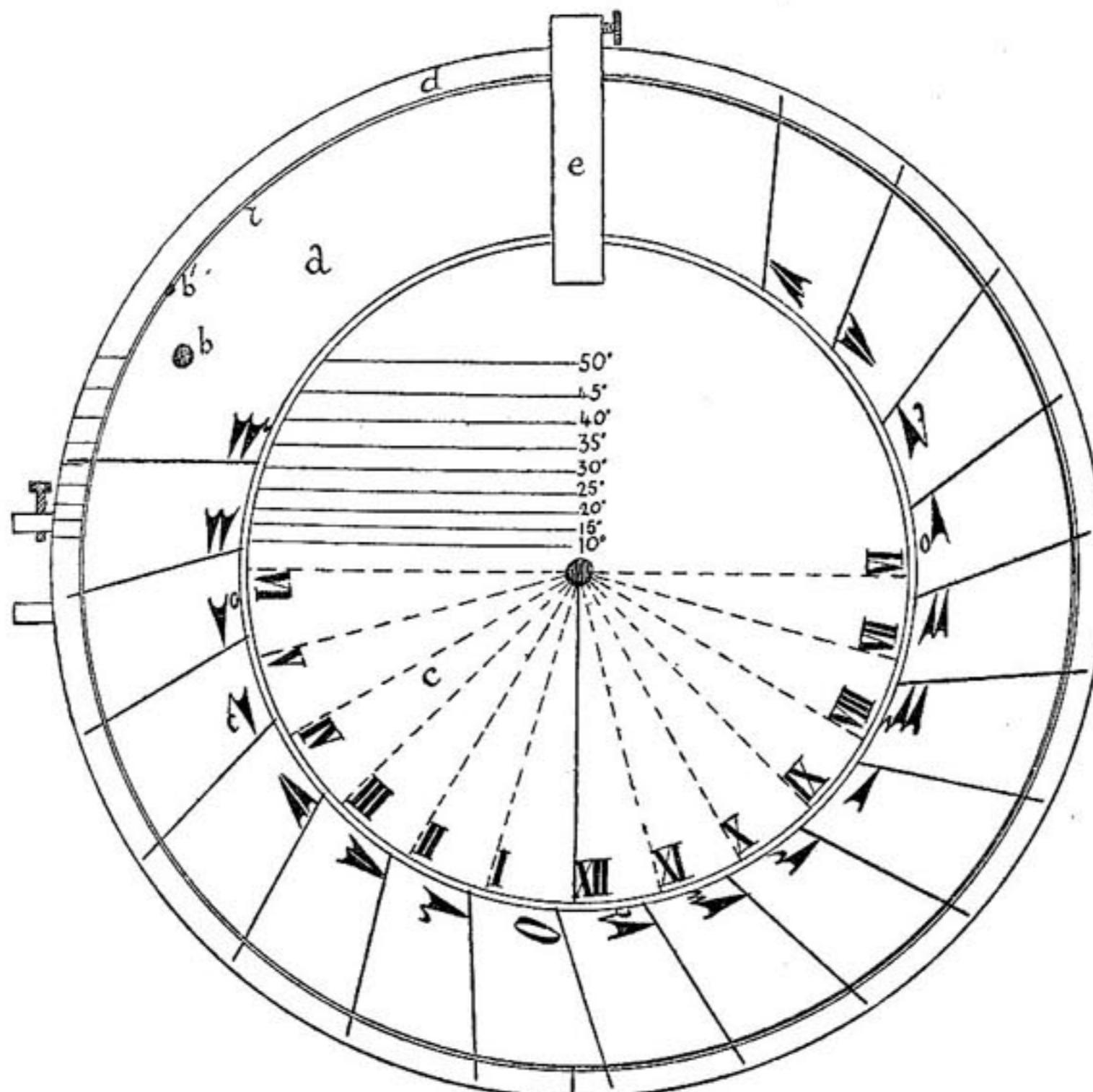


Fig. 19.

l'indice suivant que la latitude diminue ou augmente, et comme il serait pratiquement difficile de donner à l'indice une longueur variable, quelquefois démesurée, pour que $h \operatorname{tg} \lambda$ soit constant (pour que le tracé des horaires reste fixe) nous avons (fig. 19, 20 et 21) rendu la zone *a* du cadran, contenant les heures arabes, mobile autour du pied de l'indice, tout en conservant fixe le

cercle c de rayon $h \operatorname{ctg} 23^{\circ} 28'$ sur lequel nous avons tracé en rouge les lignes donnant les heures européennes. Cette zone mobile a est portée par le bouton b jusqu'à ce que la ligne horaire de 12 heures arabe coïncide au prolongement de celle des divisions tracées sur la partie supérieure du cercle fixe c qui correspond à la latitude du lieu d'observation. Ces divisions correspondent, en effet, aux différentes valeurs de $h \operatorname{tg} \lambda$ pour h constant et λ variant entre 10° et 42° de latitude nord, partie de la terre qui renferme les principaux pays musulmans. Pour la face australe ces divisions sont portées sur la partie inférieure du disque c . La lame e , soudée au disque fixe et au bord immobile d , empêche c de tourner avec a . Le cadran peut tourner d'un arc de 90° autour de l'axe ff' glissant à frottement doux sur le quart de cercle g donnant les latitudes. Deux niveaux d'eau h , h' , disposés en T, permettent, au moyen des vis v , v' , v'' , d'assurer l'horizontalité à l'instrument, de même que la boussole en assure l'orientation. (La déclinaison pour le Caire est actuellement de $2^{\circ} 33'$, 2 O.) L'extrémité de l'ombre marque l'heure arabe, sa direction donnant l'heure européenne. A un changement de latitude la ligne horaire de 12 heures doit se déplacer parallèlement à elle-même et changer de longueur, ce qui n'arriverait pas si elle était tracée. Pour cela les lignes horaires sont en fil métallique très fin, le bord intérieur de la zone a est en saillie percée de petits trous par lesquels passe librement l'extrémité du fil. Le bord extérieur de la même zone est également en saillie, mais il constitue une circonférence r indépendante pouvant tourner librement dans son plan à l'aide du bouton b' . Elle est aussi percée, mais les extrémités des fils y sont soudées et prolongées. Aussi, en nous déplaçant en latitude,

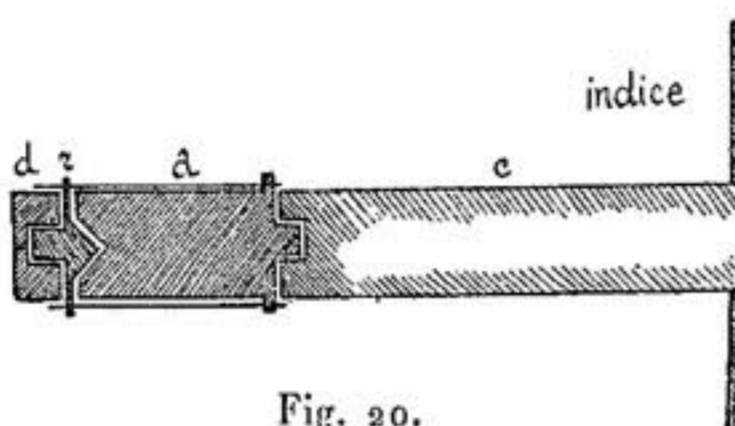


Fig. 20.

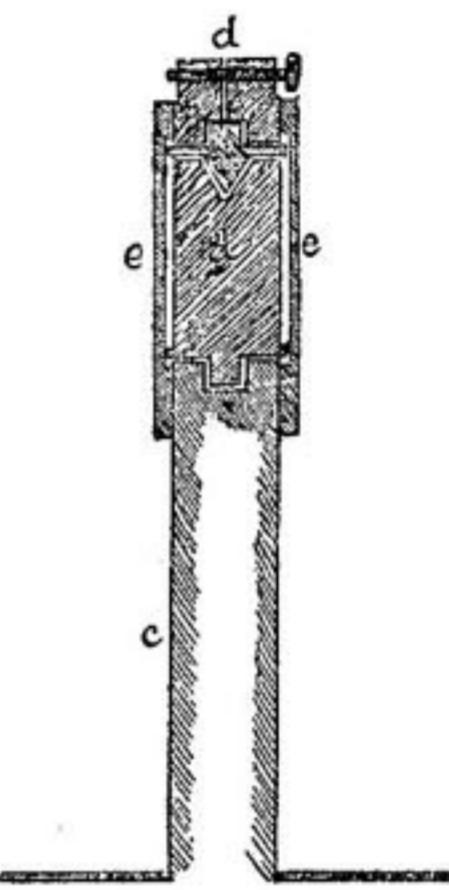


Fig. 21.

nous devons faire tourner la zone a et la circonference r dans le sens des aiguilles d'une montre, si nous nous éloignons de l'équateur et vice versa, jusqu'à ce que l'extrémité intérieure de 12 heures arrive à l'horizontale de la nouvelle latitude; en même temps nous faisons tourner r jusqu'à ce que l'heure de 12 heures devienne horizontale⁽¹⁾.

Comme aux environs des équinoxes la longueur de l'ombre de l'indice devient trop grande, nous pouvons ajouter autour du cadran, sur l'arc inférieur de son bord déterminé par la trace équatoriale, une zone cylindrique pour recevoir la partie débordante de l'ombre. Les prolongements des lignes horaires sur sa surface intérieure seront des arcs elliptiques, section de cylindre avec les plans horaires.

X. — CADRAN SOLAIRE ARABE HORIZONTAL.

Le plan du cadran horizontal passera par le pied de l'indice du cadran équatorial. Leur intersection sera parallèle à la ligne équatoriale de la figure, et l'intersection du plan horizontal avec celui du méridien sera la méridienne même de la figure (fig. 22).

Dans le plan équatorial nous avons choisi pour axe des coordonnées la méridienne et la projection de l'équatoriale; dans celui de l'horizon nous prendrons l'intersection des deux plans comme axe des y et la méridienne comme axe des x . Le premier est parallèle à l'axe des y dans le cadran équatorial et ligne commune aux deux plans. En remplaçant l'axe des y par l'intersection des deux plans, les ordonnées (toujours pour le plan équatorial) restent invariables, mais les abscisses doivent augmenter de $h \operatorname{tg} \lambda$ puisque l'ancienne origine des coordonnées a elle-même son abscisse dans le nouveau système égale à $+h \operatorname{tg} \lambda$.

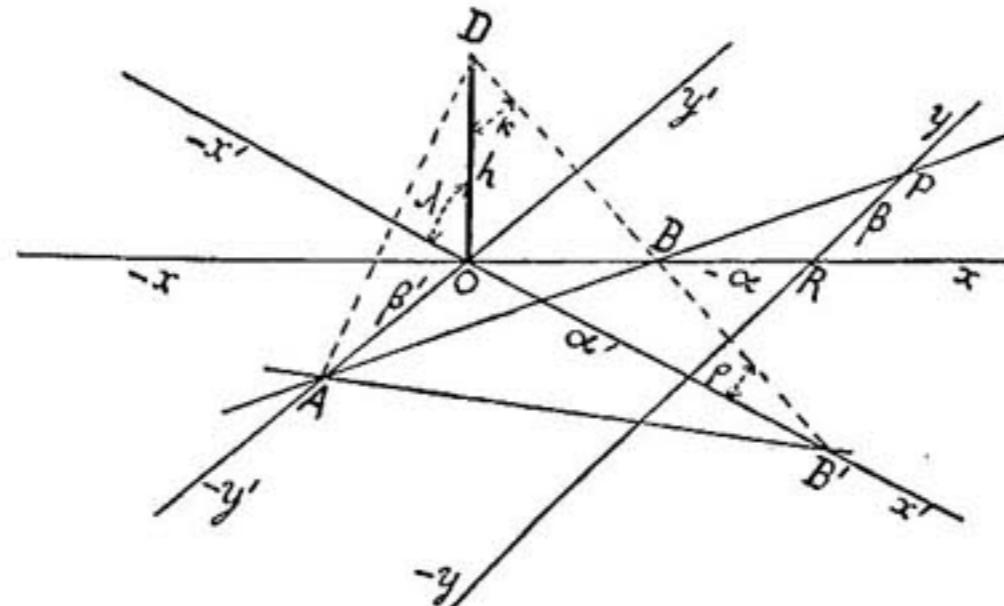


Fig. 22.

⁽¹⁾ Le premier exemplaire d'un tel cadran vient d'être construit par M. Paratore et offert en hommage au fondateur de l'Université égyptienne, S. A. le prince Ahmed Fouad pacha.

Pour trouver les lignes horaires du cadran équatorial nous chercherons les segments que séparent sur les axes des coordonnées dans le plan de l'horizon les intersections de ce plan avec les plans déterminés par les lignes horaires correspondantes du cadran équatorial et l'extrémité supérieure de l'indice.

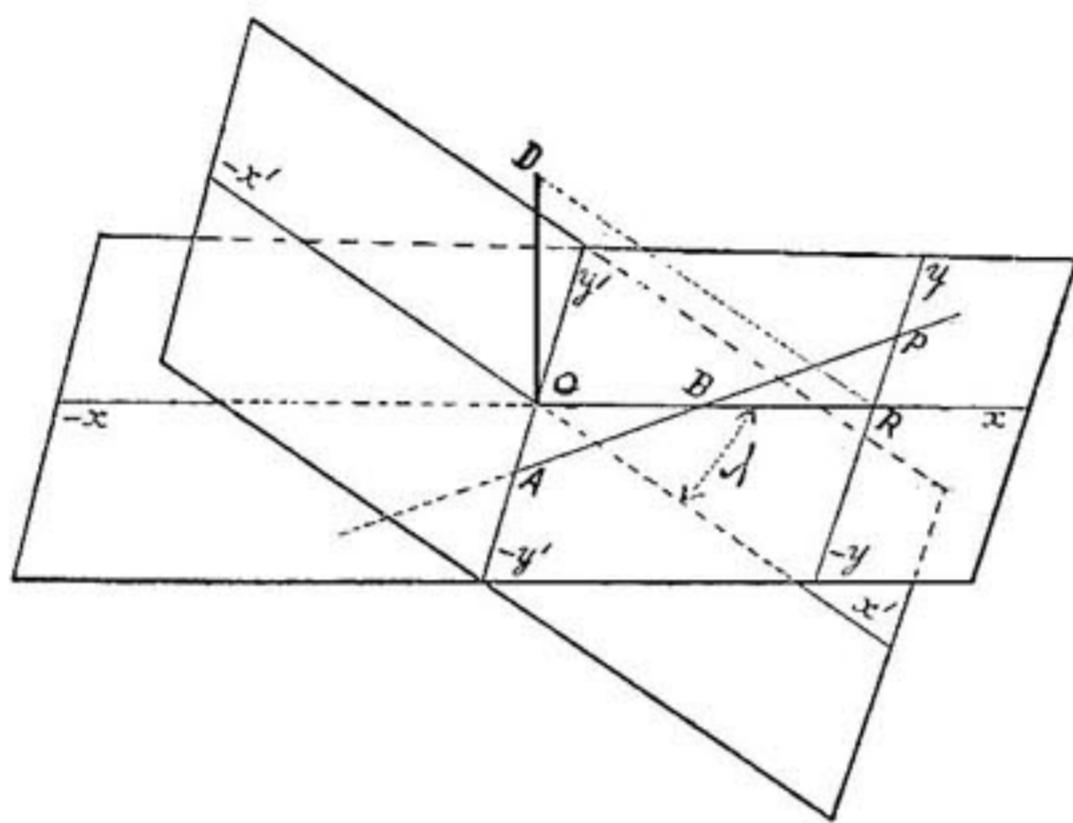


Fig. 23.

Soit (fig. 22 et 23) OD = l'indice h en longueur et en direction, $-xx$ = la méridienne de l'équatorial, $-yy$ = la ligne horaire des 12 heures dans ce même plan, $OR = h \operatorname{tg} \lambda$, $-y'y$ = l'intersection des deux cadrants,

$-x'x$ = la méridienne dans le plan horizontal, AB = une ligne horaire du cadran équatorial, AB' = la ligne horaire correspondante dans le plan horizontal, intersection de ce cadran avec le plan horaire ADB .

Nous avons vu que, en prenant $OR = h \operatorname{tg} \lambda = 1$, nous trouvons $BR = a = \frac{1 - \cos e}{\cos e}$ (qui dans la figure est négatif) et $RP = \beta = \frac{1 - \cos e}{\sin e}$. Pour trouver α' et β' en fonction de e nous procédons ainsi qu'il suit : les triangles AOB et RPB sont semblables et donnent par conséquent :

$$\frac{-\alpha}{\beta} = \frac{1 + \alpha}{-\beta'} \text{ d'où } \beta' = \frac{1}{\sin e} \dots \dots \text{ (a)}$$

D'autre part, dans les triangles DOB , OBB' nous avons : $\rho = \lambda - \alpha$.

Le triangle $B'OD$ donne :

$$\frac{\alpha'}{h} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\lambda - \alpha)} = \frac{1}{\sin \lambda \operatorname{ctg} \alpha - \cos \lambda}.$$

Mais le triangle rectangle BOD donne aussi : $h = OB \operatorname{ctg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{h}{OB}$, or $OB = \frac{1}{\cos e}$, d'où $\operatorname{ctg} \alpha = h \cos e$ et comme $h \operatorname{tg} \lambda = 1$ ou $h = \frac{\cos \lambda}{\sin \lambda}$, la valeur de α' prend la forme

$$\alpha' = -\frac{1}{(1 - \cos e) \sin \lambda} = -\frac{1}{2 \sin \lambda \sin^2 \frac{e}{2}}$$

Ayant ainsi α' et β' nous pouvons toujours tracer le cadran horizontal arabe

en déterminant les segments que les lignes horaires séparent sur les axes des coordonnées en fonction de e et de λ , où $e = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$, etc. Il ne faut pas oublier pourtant que $h \operatorname{tg} \lambda$ a été pris pour unité et que, par conséquent, il faut donner à h la longueur $\frac{1}{\operatorname{tg} \lambda}$. Nous pouvons accepter pour unité de longueur n'importe quelle grandeur, mais alors h doit être égale à cette unité divisée par $\operatorname{tg} \lambda$.

On voit que λ variant, β' en reste indépendant; or la ligne horaire correspondante à une valeur de e donnée, tourne autour du point de son intersection avec l'axe des y . Cette observation fournit le moyen de construire un cadran solaire arabe horizontal *portatif*.

Dans le cadran équatorial l'extrémité de l'ombre trace aux solstices les plus petits des parallèles dont les projections sur chacune des faces du cadran ont pour rayon $h \operatorname{ctg} 23^\circ 28'$. C'est pour cela que nous avons dit qu'il est superflu de prolonger les lignes horaires dans l'intérieur de ces cercles. Dans le cadran horizontal ces cercles seront projetés en hyperboles parce que le plan de l'horizon passant par le pied de l'indice coupe les cônes opposés qui ont pour sommet l'extrémité de l'indice et pour base les deux tropiques et leur projection sur le cadran équatorial, de manière qu'il rencontre les deux surfaces latérales obliquement. Pour tracer ces hyperboles sur le cadran horizontal il suffit de déterminer sur leur axe principal les deux sommets et les foyers. Soit (fig. 24) le triangle isocèle DZR où $ZR = 2h \operatorname{tg} \delta$ et $DO = h$. Nous prolongeons RD et nous portons OB qui forme l'angle $DOB = \lambda$. En menant

Fig. 24.

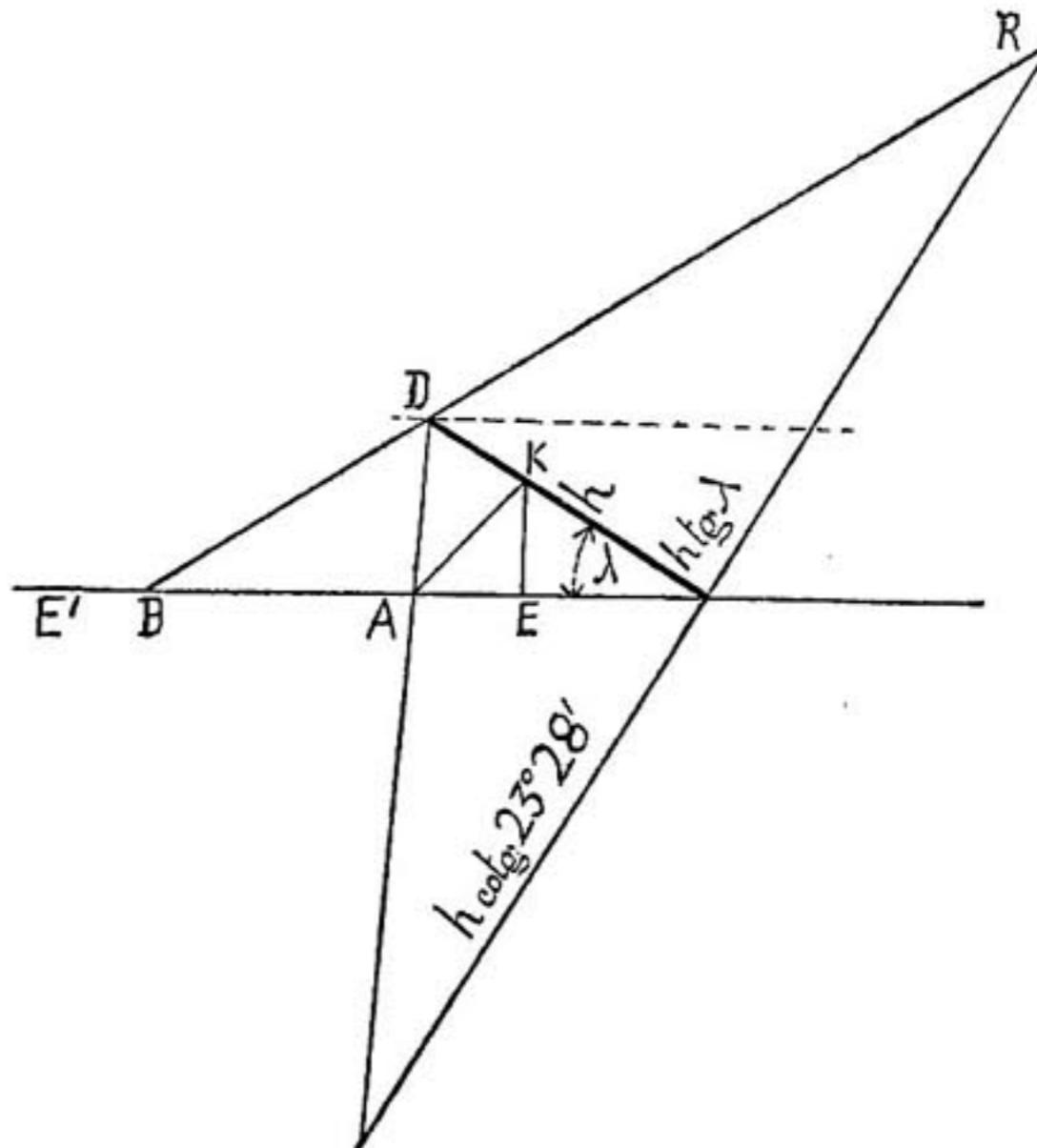


Fig. 24.

la bissectrice AK et en abaissant KE perpendiculaire à l'axe, nous obtenons A, B, sommets de l'hyperbole, et E, E' (où BE'=AE) foyers. Les lignes horaires ne doivent pas pénétrer dans les espaces enveloppés par chacune des branches.

Pour faciliter le tracé du cadran horizontal arabe, qui est le plus facile pratiquement, nous donnons dans les tableaux suivants les valeurs de β' et du premier facteur de α' qui est $-\frac{1}{2 \sin^2 \frac{e}{2}}$. De ce dernier nous donnons le cologarithme et en un troisième tableau celui de $\sin \lambda$ pour les valeurs de λ entre 10° et 45° .

VALEURS DE β' .
CALCUL DE $-\alpha'$.

POUR $e =$	$+ \beta'$
0° ou 180° :	∞
15° : $3,9$	
30° : $2.$	
45° : $1,4$	
60° : $1,2$	
75° : $1,04$	
90° :	$1.$

POUR $e =$	col $2 \sin^2 \frac{e}{2}$
15°	$\overline{1}, 46757$
30°	$0, 87297$
45°	$0, 53329$
60°	$0, 30103$
75°	$0, 13007$
90°	$\overline{1}, 99999$
105°	$\overline{1}, 90003$
120°	$\overline{1}, 82391$
135°	$\overline{1}, 76773$
150°	$\overline{1}, 72909$
165°	$\overline{1}, 70643$
180°	$\overline{1}, 69897$

CALCUL DE $-\alpha'$.

	col $\sin \lambda$.									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0,76043	0,71970	0,68212	0,64791	0,61632	0,58700	0,55966	0,53406	0,51002	0,48736
20	0,46595	0,44567	0,42642	0,40812	0,39069	0,37405	0,35816	0,34295	0,32839	0,31443
30	0,30103	0,28816	0,27579	0,26389	0,25244	0,24141	0,23078	0,22054	0,21066	0,20113
40	0,19193	0,18306	0,17449	0,16622	0,15823	0,15055				

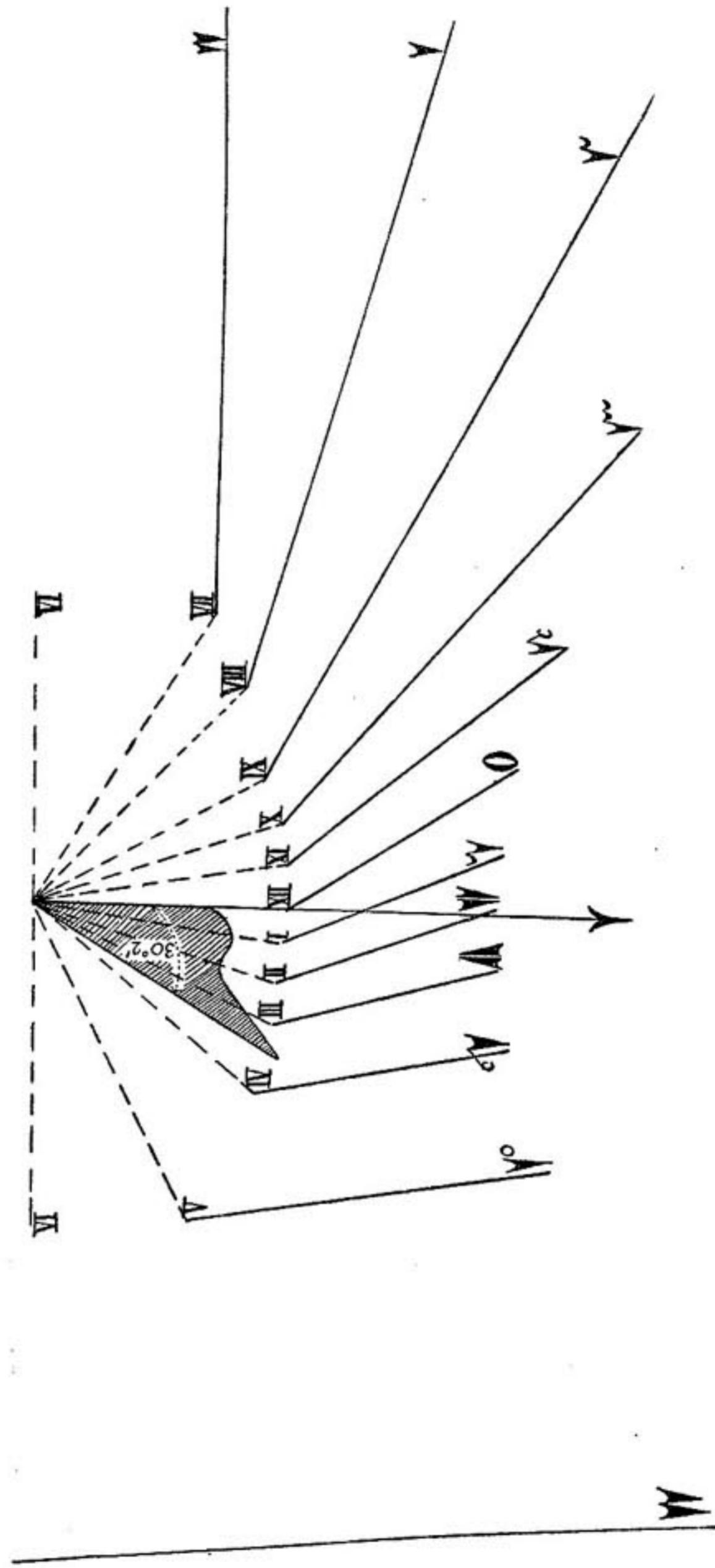


Fig. 25.

La figure 25 représente un cadran solaire arabe horizontal pour le Caire. L'indice y est représenté rabattu sur le plan. La flèche coïncide avec la méridienne et se dirige vers le nord astronomique. Pour tracer les lignes horaires européennes sur le cadran horizontal il suffit de déterminer la relation qui relie les angles φ' et φ , que forment avec la méridienne du cadran équatorial et avec celle de l'horizontal, la ligne horaire européenne dans l'un et celle qui lui correspond dans l'autre.

Soit (fig. 26) OR la ligne horaire européenne $12 \frac{e}{15}$ qui forme dans

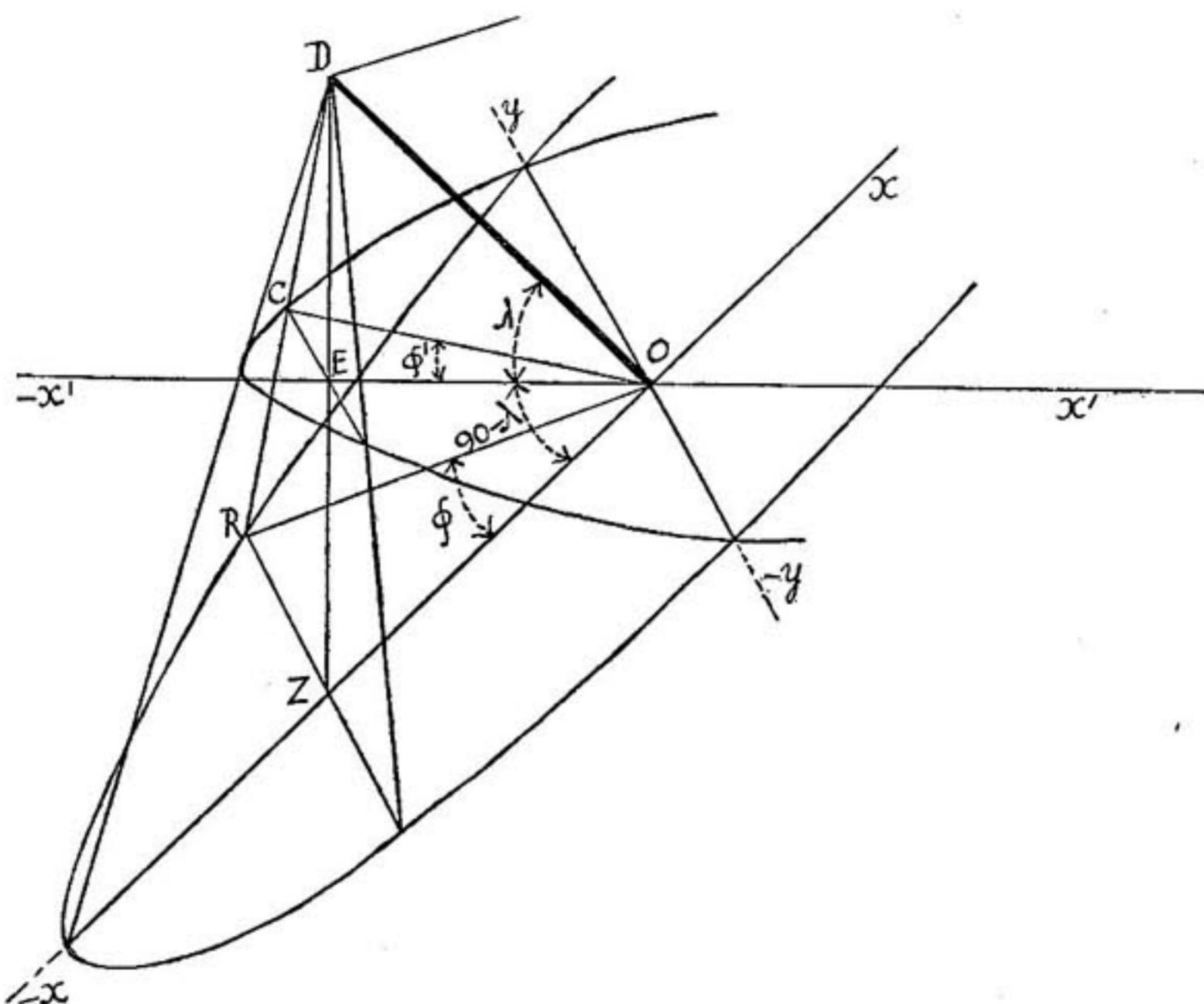


Fig. 26.

l'équatorial avec la méridienne OZ l'angle φ , et OZ sa correspondante dans le cadran horizontal formant avec la méridienne OE l'angle φ' . On aura : $CE = y'$, $OE = x'$, $RZ = y$, $OZ = x$.

Les triangles rectangles CEO, RZO donnent :

$$\begin{aligned}y' &= x' \lg \varphi' \\y &= x \lg \varphi\end{aligned}\quad (1)$$

Nous portons ES parallèle à l'indice DO. Les triangles semblables DEC, DZR d'abord, ZOD, ZSE ensuite, donnent :

$$\frac{y}{y'} = \frac{DZ}{DE} = \frac{ZO}{SO}$$

d'où

$$\frac{y}{y'} = \frac{x}{x' \sin \lambda} \quad (2)$$

puisque l'angle EOS = $90 - \lambda$. En remplaçant dans (2) les valeurs des y, y' , données par (1), nous obtenons

$$\operatorname{tg} \varphi' = \operatorname{tg} \varphi \sin \lambda.$$

On voit que l'heure européenne étant donnée par la direction et non pas par l'extrémité de l'ombre de l'indice, la condition cherchée dépend de la latitude et non pas de la longueur de l'indice. Ce qui n'arrive pas pour les heures arabes.

XI. — HORLOGES FRANCO-ARABES AVEC SONNERIE POUR LES HEURES DE PRIÈRE.

Dans les grandes villes de l'Islam on se sert en même temps de l'heure arabe et de l'heure européenne. Il importe donc d'avoir des horloges qui puissent donner les deux espèces d'heures en même temps. On voit dans les marchés d'Orient des essais de tels instruments, mais qui n'ont pas pu se faire adopter par le public, comme étant entachés du même inconvénient très grave : leur réglage est presque toujours impossible, car au moment où on règle l'heure européenne on ne connaît pas exactement l'heure correspondante arabe.

Nous croyons avoir obvié à cet inconvénient par la solution suivante : le verre ou lentille est plan, parfaitement concentrique avec le cadran de l'horloge et peut tourner dans son cadre. Sur sa surface intérieure, pour éviter la réfraction due à son épaisseur, nous avons tracé en rouge les heures européennes, tandis que le cadran porte les heures arabes sur une zone de rayon plus grande. Entre les deux sont tracées les minutes. Pour assurer la correspondance des deux espèces d'heures d'une manière pour ainsi dire automatique nous avons procédé comme il suit :

Reprendons le tracé (chap. V, fig. 9) des projections sur le plan de l'équateur des cercles de latitudes et du terminateur déterminé par la position du soleil sur l'écliptique. Il est bien facile d'y voir que le rayon de 12 heures arabe, s'éloignant de sa position aux jours des équinoxes, entraîne celui de 6 heures à un déplacement égal et de même sens. On peut donc tracer les projections elliptiques du terminateur sur la méridienne comme grand axe et considérer comme se déplaçant le rayon de 6 heures, ou que, celui-ci restant fixe, considérer que c'est la méridienne ou rayon de XII heures qui se déplace d'un angle égal mais de sens contraire. Dans ce cas il faut coter les ellipses de manière que les dates à droite de la méridienne soient les mêmes que les dates au-dessus du diamètre horizontal. C'est ce que nous avons adopté lorsque ce sont les heures européennes qui sont tracées sur le verre mobile. On a ainsi le vrai temps, tant arabe qu'européen. Mais comme les musulmans n'ont besoin du midi vrai exact que pour leur prière de midi, qui sera donnée par la sonnerie des heures, et comme, d'autre part, l'heure européenne est donnée partout en temps moyen, il faut que le rayon de XII heures soit porté à coïncider avec l'heure arabe à midi moyen. Nous calculons, à cet effet, les ellipses pas en fonction des déclinaisons du soleil vrai, mais en fonction de celles du soleil moyen. Pour l'Égypte il faut y apporter une dernière correction, celle du méridien légal qui est celui de 30° E Greenwich, soit une différence additive de $5^{\text{m}} 2^{\text{s}}$ sur l'heure du méridien du Caire.

EXEMPLE. — *Quelle est l'heure arabe au Caire à midi moyen le 5 mars?*

$$\lambda = 30^{\circ} 2' 4''$$

$$\delta = -6^{\circ} 13'$$

Angle horaire du coucher astronomique : $5^{\text{h}} 45^{\text{m}} 33^{\text{s}}$.

Heure arabe à midi vrai : $12^{\text{h}} - (5^{\text{h}} 45^{\text{m}} 33^{\text{s}} + 4^{\text{m}} 23^{\text{s}})$ soit $6^{\text{h}} 10^{\text{m}} 4^{\text{s}}$

Équation du temps le 5 mars $+ 11^{\text{m}} 45^{\text{s}}$

Heure arabe à midi moyen $6^{\text{h}} 21^{\text{m}} 49^{\text{s}}$

Correction légale du méridien $+ 5^{\text{m}} 2^{\text{s}}$

Heure arabe à midi moyen légal au Caire $6^{\text{h}} 26^{\text{m}} 51^{\text{s}}$

Les minutes, qui sont communes pour les deux heures, sont comptées à partir du 12 heures arabe. L'aiguille des minutes est double, mise en mouvement par le même axe, mais l'une peut être écartée de l'autre et chacune

a la couleur des heures auxquelles elle se rapporte. L'aiguille arabe est en retard sur l'aiguille européenne autant de minutes que le 12 heures arabe surpasse de minutes l'heure européenne immédiatement précédente. Les deux aiguilles sont effilées et sans aucun ornement ni contrepoids.

Sonnerie. — Le principe de la sonnerie des heures de prière est le suivant : l'angle formé par le rayon de 12 heures arabe et européenne donne la demie — durée du jour entre le lever et le coucher. Notre horloge a sur le côté droit du cadran un arc dont la circonference complète serait divisée en 24 heures, et cet arc contient les heures extrêmes entre lesquelles oscille pendant l'année l'heure arabe de midi. Il porte une aiguille, de même couleur que le fond du cadran, qui doit être portée par l'opérateur au moment du réglage à indiquer sur l'arc l'heure arabe marquée par le 12 heures européenne de l'horloge. Il est à noter pourtant que, quoique les traits des divisions de cet arc portent la double date que les traits correspondants qui servent pour le règlement de la correspondance des heures, ils sont calculés sur le midi vrai.

Ce mouvement de l'aiguille arrange par un mécanisme spécial les ailes mobiles d'une roue dans le mécanisme de la sonnerie qui correspond aux différentes prières⁽¹⁾.

Pour ne pas compliquer le mécanisme de la sonnerie on a adopté pour les heures d'el-Subh, d'el-Asr et d'el-Isha leur valeur moyenne. Il importe enfin de remarquer que le déplacement annuel de l'heure du midi vrai est d'une part la moitié exacte de celui du lever et, par conséquent, de celui de la valeur moyenne d'el-Subh et, d'autre part, le double presque exactement de celui d'el-Asr.

G. ARVANITAKI.

⁽¹⁾ M. Christo Diacoyanni, l'habile horloger du Caire à qui j'ai confié l'exécution technique de ma pendule franco-arabe à sonnerie de prière, a inventé un système de sonnerie qui répond pleinement aux données du calcul.